Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа с. Тополево
имени Героя Советского Союза полковника милиции Грищенко Павла Яковлевича
Хабаровского муниципального района Хабаровского края

РАССМОТРЕНО	ПРИНЯТО	УТВЕРЖДЕНО
Руководитель ШМО	Педагогическим советом протокол от 30.08.2023 № 1	Директор школы
________________________		________________________
Семёнова Н.Н. протокол №1 от «29» августа 2023г.		Кирилкина О.С. приказ № 77 от «1» сентября 2023г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

По курсу: «Способы решений нестандартных уравнений» (элективный курс)
Уровень СОО: углублённый
Класс: 11
Количество часов: 34
Учитель: Трескова Анна Александровна

Срок реализации 1 год

Пояснительная записка

Элективный курс «Способы решения нестандартных уравнений» разработан для обеспечения обучающихся 11 класса занятиями по выбору на уровне среднего общего образования. Предлагаемый курс «Способы решения нестандартных уравнений» позволяет осуществлять задачи профильной подготовки старшеклассников. Курс рассчитан на 34 академических часа в аудитории и ориентирован на учащихся 11 классов.

Данный элективный курс направлен, прежде всего, на удовлетворение индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей каждого школьника в математике, способствует удовлетворению познавательных школьников в методах и приёмах решения нестандартных задач. Содержание курса углубляет «линию уравнений» в школьном курсе математики и не дублирует программу базового и профильного изучения алгебры и начал анализа. Именно поэтому, изучая данный элективный курс, у старшеклассников повысится возможность намного полнее удовлетворить свои интересы и запросы в математическом образовании, повысятся результаты образования. Элективный курс «Нестандартные способы решения уравнений» занимает значимое место в образовании старшеклассников, так как даёт ему возможность применить свои умения в нестандартных ситуациях, получить возможность «поучиться не для аттестата» а для решения последующих жизненных планов. С другой стороны, курс позволяет выпускнику средней школы приобрести необходимый и достаточный набор умений по решению уравнений и лучше подготовиться к обучению в вузе и ссузе, где математика является профилирующим предметом.

Целесообразность введения данного элективного курса состоит и в том, что содержание курса, форма его организации помогут школьнику через практические занятия оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы и предоставят ему возможность работать на уровне повышенных возможностей. Элективный курс «Способы решения нестандартных уравнений» позитивно влияет на мотивацию старшеклассника к учению, развивает его учебную мотивацию по предметам естественно-математического цикла, способствует положительной мотивации у него.

Задания, предлагаемые программой данного элективного курса, носят исследовательский характер и способствуют развитию навыков рационального мышления, способности предвидеть результат.

Материал курса «Способы решения нестандартных уравнений» разбит на 7 модулей, каждый из которых посвящён специальному виду нестандартных уравнений: уравнения-тождества; уравнения, при решении которых используется теория прогрессий; уравнения, при решении которых используется монотонность; уравнения, при решении которых используется ограниченность; уравнения с двумя переменными; показательно-степенные уравнения; комбинированные нестандартные уравнения.

В курсе систематизированы теоретические и практические основы знаний и умений «линии уравнений», рассматриваются комбинированные уравнения, уравнения, в которых присутствуют элементы прогрессий.

Каждый из модулей элективного курса имеет законченный вид, что позволяет старшекласснику, который ошибочно выбрал курс, пойти в следующей четверти или полугодии на занятия по изучению другого элективного курса.

Цель курса **:**

углубление знаний учащихся о различных методах решения уравнений и базовых математических понятий, используемых при обосновании того или иного метода решения; формирование у школьников компетенций, направленных на выработку навыков самостоятельной и групповой исследовательской деятельности.

Задачи курса **:**

1. Классификация способов решения нестандартных уравнений, углубление теоретических основ школьной математики для решения каждого вида уравнений.
2. Интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе. Развитие мыслительных способностей учащихся: умения анализировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать.
3. Воспитание личности в процессе освоения математики и математической деятельности, развитие у учащихся самостоятельности и способности к самоорганизации.

Для реализации целей и задач данного элективного курса предполагается использовать следующие **формы учебных занятий:** лекции, семинары, практикумы.

Основой проведения занятий может служить технология деятельностного метода, которая обеспечивает системное включение ребенка в процесс самостоятельного построения им нового знания и позволяет учителю проводить разноуровневое обучение. Занятия должны носить проблемный характер. Ученики самостоятельно, в микрогруппах, в сотрудничестве с учителем выполняют задания, предполагающие исследовательскую деятельность, на занятиях организуется обсуждение результатов этой работы.

Оперативную коррекцию в овладении учебной деятельностью можно провести на уроках-практикумах. Урок-практикум – своеобразная самостоятельная работа, вариант, объем заданий учащиеся выбирают сами, исходя из уровня усвоения материала, мотивации развития, норм оценок. Каждому ученику предоставляется право проверить правильность решения каждого задания, получить консультацию учителя. Учитель выступает как субъект педагогической деятельности, помощник, а не контролер. Ученик управляет своей деятельностью, своим развитием, формируя качества субъекта учения и самовоспитания.

Требования к уровню освоения содержания курса

В результате изучения курса учащиеся овладевают следующими знаниями, умениями и способами деятельности:

- имеют представление о математике как форме описания и методе познания действительности;
- умеют анализировать, сопоставлять, сравнивать, систематизировать и обобщать;
- умеют самостоятельно работать с математической литературой;
- знают основные приемы решения нестандартных уравнений, понимают теоретические основы способов решения уравнений;
- умеют решать нестандартные уравнения различными методами;
- умеют представлять результат своей деятельности, участвовать в дискуссиях;
- умеют проводить самоанализ деятельности и самооценку ее результата.

Формы контроля

Смысл профильного курса заключается в предоставлении каждому ученику «индивидуальной зоны потенциального развития», поэтому – нельзя требовать от каждого ученика твердого усвоения каждого «нестандартного приема». Специальный зачет или экзамен по курсу не предусмотрен, но предлагаются некоторые варианты выполнения учениками зачетных заданий:

1. Решение учеником в качестве индивидуального домашнего задания предложенных учителем задач из того списка, что завершает каждый модуль и называется «Упражнения для самостоятельной работы», т.к. осознание и присвоение учащимися достигаемых результатов происходит с помощью рефлексивных заданий. Подбор индивидуальных заданий осуществляется с учетом уровневой дифференциации, причем выбор делают сами ученики, оцениваясвои возможности и планируя перспективу развития.

2. Решение группой учащихся в качестве домашнего задания предложенных учителем задач из того же раздела. Работа в группе способствует проявлению интереса к учению как деятельности.

Учащимся, ориентированным на выполнение заданий более высокого уровня сложности, предлагается:

- Самостоятельное изучение некоторых вопросов курса с последую щей презентацией (программные продукты Microsoft Power Point).
- Самостоятельное решение предложенных задач с последующим раз

бором вариантов решений.

- Самостоятельное построение метода, позволяющего решить предло женную задачу.
- Самостоятельный подбор задач на изучаемую тему курса из допол нительной математической литературы.

В ходе решения этих заданий учащиеся должны показать понимание теоретических основ способов решения уравнений и уметь решать задания из «Упражнений для самостоятельной работы» (подбор индивидуальных заданий осуществляется с учетом уровневой дифференциации).

Итоговое занятие предлагается провести в форме круглого стола с презентациями каждого модуля курса.

Учебно-тематический план курса

№	Тема	Количество часов	Дата проведения	
			План	Факт
1	Уравнения-тождества	2		
2	Уравнения, при решении которых используются прогрессии	4		
3	Уравнения, при решении которых используется ограниченность функции	4		
4	Уравнения, при решении которых используется монотонность функции	4		
5	Уравнения с двумя неизвестными	4		
6	Показательно-степенные уравнения	4		
7	Практикум по решению некоторых других нестандартных уравнений	10		
	Итоговое занятие	2		
	Всего	**34**		

Математическое содержание курса

Тема 1. ***Уравнения тождества***

Область определения элементарных функций. Область определения и множество решений уравнения. Виды уравнений.

Учащиеся должны знать:

- формулы алгебры и тригонометрии;
- понятие области определения элементарных функций;
- понятие области определения и множества решения уравнния.

Учащиеся должны уметь:

- выделять «опасные операции» над переменной *X*, содержащиеся в записи уравнения (извлечение корня четной степени, деление на выражение с переменной, логарифмирование, возведение в степень, «взятие» тангенса, котангенса, арксинуса и арккосинуса)
- составлять и решать систему ограничений.

Тема 2. ***Уравнения, при решении которых используются прогрессии***

Теория прогрессий: понятийный аппарат, характеристические свойства, формулы n-го члена и суммы членов прогрессий. Уравнения высших степеней, дробно-рациональные и трансцендентные уравнения.

Учащиеся должны знать:

- определения базовых понятий последовательностей, формулы n-го члена и суммы членов прогрессий, характеристические свойства прогрессий;
- приёмы решения показательных, дробно-рациональных уравнений, трансцендентных уравнений, в записи которых присутствуют суммы прогрессий.

Учащиеся должны уметь:

- выделять в уравнении сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (сумму арифметической прогрессии);
- решать рациональные, показательные и логарифмические уравнения, используя теорию прогрессий.

Тема 3. ***Уравнения, при решении которых используется ограниченность функции***

Множество значений функции. Понятие ограниченности функции.

Метод замены исходного уравнения системой уравнений.

Виды уравнений, при решении которых используется ограниченность функции.

Учащиеся должны знать:

- таблицу множеств значений элементарных функций;
- определения ограниченной функции (ограниченной снизу, ограниченной сверху) на промежутке;
- теорему, позволяющую заменить данное уравнение системой уравнений, учитывая ограниченность функций, входящих в исходное уравнение;
- обобщённый алгоритм решения уравнений методом оценки и критерии его применения.

Учащиеся должны уметь:

- исследовать функции на ограниченность;
- определять тип уравнения, к которому применим метод оценки;
- применять метод оценки к решению уравнений;
- решать нестандартные системы уравнений методом оценки.

Тема 4. ***Уравнения, при решении которых используется монотонность функций***

Теорема, устанавливающая связь монотонности функций, входящих в уравнение, с количеством корней соответствующего уравнения.

Виды уравнений, при решении которых используется монотонность функций.

Учащиеся должны знать:

- определения возрастающей, убывающей, монотонной функций;
- теорему, устанавливающую связь монотонности функций, входящих в уравнение, с количеством корней соответствующего уравнения;
- обобщённый алгоритм решения уравнений методом использования монотонности функций;
- виды уравнений, решаемых с использованием монотонности функций.

Учащиеся должны уметь:

- находить область определения функций;
- исследовать функцию на монотонность;
- применять обобщённый алгоритм решения уравнений методом использования монотонности функции к соответствующим видам уравнений.

Тема 5. ***Уравнения с двумя неизвестными***

Виды уравнений с двумя неизвестными и способы их решения:

Метод оценки. Решение уравнений, как квадратного относительно одной из неизвестных; разложением на множители; заменой исходного уравнения системой уравнений.

Учащиеся должны знать:

- условие равенства нулю суммы неотрицательных чисел;
- множества значений элементарных функций;
- понятие ограниченности функций;
- способы решения уравнений с двумя неизвестными:
  - замена исходного уравнения системой уравнений,

– метод оценки,

– решение уравнения с двумя неизвестными второй степени, как квадратного относительно одной из неизвестных,

– разложение на множители.

Учащиеся должны уметь:

- определить вид уравнения;
- находить область определения уравнения;
- оценивать левую и правую части уравнения, применять метод оценки;
- раскладывать на множители;
- выбирать рациональный способ решения;
- решать системы уравнений.

Тема 6. *Показательно-степенные уравнения*

Понятие показательно-степенного уравнения.
Метод сведения уравнения к совокупности систем уравнений и неравенств.

Учащиеся должны знать:

- определения, свойства степенной и показательной функций;
- способы и особенности решения рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений и неравенств.

Учащиеся должны уметь:

- анализировать, сопоставлять, сравнивать, обобщать;
- исследовать показательно-степенные уравнения;
- сводить их к совокупности систем уравнений и неравенств;
- решать системы уравнений и неравенств.

Тема 7. *Практикум по решению некоторых других нестандартных уравнений предполагает исследовательскую деятельность учащихся*

Итоговое занятие предлагается провести в форме круглого стола с презентациями. Комбинированные уравнения (показательно-логарифмические, логарифмически-показательные, показательно-тригонометрические, тригонометрическо-показательные и т.д.).

Учащиеся должны знать:

- этапы исследовательской деятельности.

Учащиеся должны уметь:

- использовать этапы исследовательской деятельности на практике.

Учебно-методическое обеспечение курса

1. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования.
2. Концепция математического образования.
3. Кармакова Т.С., Володькин Е.Г. Способы решения нестандартных уравнений и систем уравнений: Дидактические материалы для учителей математики. Хабаровск. Издательство ХК ППК ПК. 2015 г.
4. Кармакова Т.С. Практикум по элементарной математике для подготовки к ЕГЭ. Хабаровск. Издательство ХК ППК ПК. 2014 г.
5. Кармакова Т.С., Попова Ю.В. Приложение прогрессий. Элективный курс по математике для предпрофильной подготовки учащихся 9 кл. Хабаровск 2015 г.
6. Письменный Д.Т. Готовимся к экзамену по математике (школа и ВУЗ). Домашний репетитор. АЙРИС 2015 г.
7. Ковалева Г.И., Бузулина Т.И. и др. Математика для учащихся 11 класса и поступающих в ВУЗы. Тренировочные тематические задания. Волгоград: Учитель, 2015 г.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ К ЭЛЕКТИВНОМУ КУРСУ

1. Уравнения, множеством решений которых является область определения уравнения

К таким уравнениям будем относить уравнения-тождества (уравнения-формулы). Примеры уравнений-тождеств:

1.1 $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 1$

1.2 $\sqrt{x^2} = |x|$

1.3 $\log_x x = 1$

1.4 $\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$

1.5 $\sin x = tgx \cdot \cos x$

1.6 $\frac{x}{x} = 1$

Теоретической основой решения уравнений-тождеств являются:

- формулы алгебры и тригонометрии;
- понятия области определения и множества решения уравнения;
- области определения элементарных функций.

Под областью определения уравнения (ООУ), как известно, понимают общую часть областей определения функций, входящих в уравнение. Под множеством решений уравнения $f(x) = g(x)$ (МРУ) понимают множество значений переменной x, при которых получается верное числовое равенство.

Составим таблицу областей определения элементарных функций.

Элементарные функции и их области определения

№	Функция	ООФ
1	Линейная функция $y = kx + b$, где k и b – любые действительные числа.	$x \in R$
2	Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c – любые действительные числа, $a \neq 0$.	$x \in R$
3	Степенная функция $y = x^p$	Если $p \in N$, то $x \in R$ Если $p \in Z,\ p < 0$, то $x \neq 0$ Если $p > 0,\ p \in R$, то $x \geq 0$ Если $p < 0,\ p \in R$, то $x > 0$
4	Показательная функция $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$x \in R$
5	Логарифмическая функция $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$x > 0$
6	Тригонометрические функции	
	$y = \sin x$	$x \in R$
	$y = \cos x$	$x \in R$

	$y = tgx$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
	$y = ctgx$	$x \neq \pi k,\ k \in Z$
7	Обратные тригонометрические функции	
	$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$
	$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$
	$y = arctgx$	$x \in R$
	$y = arcctgx$	$x \in R$
8	Дробно-рациональная функция $y = \frac{k_1 x + b_1}{k_2 x + b_2}$	$x \neq -\frac{b_2}{k_2}$

Решим примеры 1.1 – 1.6.

Уравнение	ООУ	МРУ	Опорные знания
$x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = 1$	$x > 0$	$x > 0$	Область определения степенной функции с действительным показателем
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$	$x \in R$	$x \in R$	Область определения степенной функции и понятие модуля числа
$\log_x x = 1$	$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$	Понятие логарифмической функции и её область определения
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x$	$x \neq \pi k,\ k \in Z$	$x \neq \pi k,\ k \in Z$	Области определения функции $y = ctgx$ и дробно-рациональной функции
$\frac{x}{x} = 1$	$x \neq 0$	$x \neq 0$	Область определения дробно-рациональной функции

Приступая к обучению решению уравнений рассматриваемого вида, следует учить учащихся:

1) выделять «опасные операции» над переменной x, содержащиеся в записи уравнения (под «опасными операциями» понимаем те операции, которые требуют ограничений: извлечение корня чётной степени, деление на выражение с переменной, логарифмирование, возведение в степень, «взятие» тангенса, котангенса, арксинуса и арккосинуса);

2) составлять и решать систему ограничений.

Задания для самостоятельной работы

Решите уравнения:

1.7 $tgx \cdot ctgx = 1$

1.8 $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

1.9 $tg(arctgx) = x$

1.10 $\sin(\arcsin x) = x$

1.11 $\sin^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2\sqrt{1-x^2} = 1$

1.12 $x^{2k} \cdot x^{-2k} = 1, \quad k \in N$

1.13 $x^{e} \cdot x^{-e} = 1$

1.14 $x^{\frac{4}{5}} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = 1$

1.15 $\log_{0,1}(x+4) + \log_{0,1}(x-4) = \log_{0,1}(x^2-16)$

1.16 $\left(\sqrt{-\cos x}\right)^2 = -\cos x$

1.17 $\sqrt[4]{ctg^4 x} = |ctgx|$

1.18 $\log_{\sqrt{2}} x^6 = 6\log_{\sqrt{2}} |x|$

1.19 $\frac{1}{|\cos x|} = \sqrt{1+tg^2 x}$

1.20 $x-4+\quad 2-x = 1$

1.21 $(x^2-3x-4)^2(x^2-3x-4)^{-2} = 1$

1.22 $\log_3(x+1) - \log_3(-x-1) = \log_3\frac{x+1}{-x-1}$

Ответы:

1.7 $x \neq \frac{\pi}{2}k, k \in Z$

1.8 $x \neq 0$

1.9 $x \in R$

1.10 $|x| \leq 1$

1.11 $|x| \leq 1$

1.12 $x \neq 0$

1.13 $x > 0$

1.14 $x > 0$

1.15 $x > 4$

1.16 $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$

1.17 $x \neq \pi k, k \in Z$

1.18 $x \neq 0$

1.19 $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

1.20 $x \in \varnothing$

1.21 $x \neq -1, \quad x \neq 4$

1.22 $x \in \varnothing$

2. <u>Уравнения, при решении которых используются прогрессии</u>

Обобщение и систематизацию теоретического материала по арифметической и геометрической прогрессиям представим в виде таблицы. Таблица состоит из 3 столбцов и включает в себя следующие единицы рассматриваемой теории:

- определения последовательностей,
- формулы *n*-го члена,
- формулы суммы *n* первых членов,
- характеристические свойства прогрессий.

Теория прогрессий

<table>
<tr><th>Прог-
рессии</th><th>Арифметическая</th><th colspan="2">Геометрическая</th></tr>
<tr><td>1) Определение поня-
тий</td><td>-числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d.
Число d называется разностью арифметической прогрессии.
Обозначается:
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, где
$a_{n+1} = a_n + d$.</td><td>-числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, не равное нулю.
Число q называется знаменателем геом. прогрессии.
Обозначается: $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$,
где $b_{n+1} = b_n * q$.</td><td>Если модуль знаменателя q меньше единицы, то геометрическая. прогрессия называется бесконечно убывающей.
Т.е. при $|q| < 1$.</td></tr>
<tr><td>2) Примеры
прогрессий</td><td>1). 1, 2, 4, 6, 8, 10 , … , 2n.
2). 1, 3, 5, 7, 9, 11.
3). 7, 7, 7, 7, 7.
4). 1/3, 2/3, 1, 4/3 , … .</td><td>1) 1, 2, 4, 8, 16, …, 2^n
2) -3, 9, -27 , 81 , -243 ,…
3) 2, 7 , 24.5 , 85.75.
4) 5, 5, 5, 5, …</td><td>1) 2, 1, ½, ¼, …
2) 1 ,2/3, 4/9…
3) -16, -8, -4, …
4) 100, -10, 1.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3) Алгоритмы распознавания про-
грессий</td><td colspan="3"><u>Для того, чтобы выяснить является ли последовательность:</u></td></tr>
<tr><td>♦ арифметической прогрессией,
1) Найти разность d между первым и вторым членами последовательности.
2) Проверить, каждый ли ее элемент, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d.
3) Сделать вывод.</td><td>♦ геометрической необходимо:
1) Найти частное q от деления первого члена на второй последовательности.
2) Проверить, каждый ли ее элемент, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q.
3) Сделать вывод.</td><td>♦ бесконечно убывающей геом.прогрессией необходимо проверить что:
1) данная последовательность имеет бесконечное число членов;
2) последовательность - геометрическая,
3) что $|q| < 1$.</td></tr>
<tr><td>4) Характеристическое
свойство прогрессий</td><td>Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \ldots(1)\ldots$$</td><td colspan="2">Каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, равен среднему геометрическому двух соседних с ним членов:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} * b_{n+1}} \quad \ldots(2)\ldots$$</td></tr>
</table>

5) Типы задач на применение свойства прогрессий	1) Даны два числа: 11 и 35. Какое число, лежащее между ними, нужно выбрать, чтобы полученные три числа составляли арифметическую прогрессию?	1) Какое число нужно поместить между числами 3 и 243, чтобы три числа составляли геометрическую прогрессию?
6) Алгоритмы решения задач на характер. свойство	Для того, чтобы найти элемент a_2, лежащий между данными элементами a_1 и a_3, такой что элементы a_1, a_2, a_3 составляют арифметическую прогрессию, необходимо: 1) Подставить известные данные в формулу (1), 2) Вычислить искомый элемент. 3) Сделать вывод.	Для того, чтобы найти число, располагающееся между известными числами b_1 и b_3, такое что получившиеся три числа будут составлять геометрическую прогрессию b_1, b_2, b_3 необходимо: 1) Подставить известные данные в формулу (2), 2) Вычислить, то искомое число. 3) Сделать вывод.
7) Формула n –го члена	$\mathbf{a_n} = a_1 + (n-1) \cdot d$	$\mathbf{b_n} = b_1 * q^{n-1}$
8) Типы задач на применение формулы n – го члена	1). Дана арифметическая прогрессия 13, 11, 9, … . Найти ее 31 –й член.	1). Дана геометрическая прогрессия ¼, ½, 1, … .Найти ее 9 –й член.
	2). Найти первый член арифметической прогрессии , если $d = -3$, $a_{11} = 20$.	2). Найти первый член геометрической прогрессии, если $q=2$, $b_4 =32$.
	3). Найти разность арифметической прогрессии , если $a_1 =7$, $a_{16} =67$.	3). Найти знаменатель геометрической прогрессии, если $b_1=2$, $b_5 =162$.
	4). Число -22 является членом арифметической прогрессии 44 , 38, 32,… Найти номер этого члена.	4). Число 162 является членом геометрической прогрессии 2, 6 , 18 , … Найти номер этого члена.

9) Алгоритмы решения задач на применение формулы n –го члена	Для того, чтобы <u>*найти*</u> a_n (или a_1, или n, или d) <u>*данной прогрессии*</u> необходимо: **1)** Найти или указать: • первый член a_1, разность d и номер искомого элемента n (или (d, a_n *и* n), или (a_1 d), или (a_1, a_n *и* n)). **2)** Подставить найденные значения в формулу n –го члена. **3)** Найти значение a_n (или a_1, или n, или d). **4)**Записать ответ.	Для того, чтобы <u>*найти*</u> b_n (или b_1, или n, или q) <u>*данной прогрессии*</u> необходимо: **1)** Найти или указать: • первый член b_1, знаменатель q и номер искомого элемента данной прогрессии n (или (q, b_n *и* n), или (b_1 q), или (b_1, b_n *и* n)). **2)** Подставить найденные значения в формулу n –го члена. **3)** Найти значение b_n (или b_1, или n, или q). **4)**Записать ответ.	
10) Сумма n первых членов прогрессий	$\mathbf{S_n} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n =$ $= n \cdot (a_1 + a_n) / 2$ или $\mathbf{S_n} = n \cdot [\, 2a_1 + d(n-1)\,] / 2$	$\mathbf{S_n} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$. $\mathbf{S_n} = b_1 \cdot \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$	$\mathbf{S} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$. $\mathbf{S} = b_1 \cdot \dfrac{1}{1-q}$.
11) Типы задач на применение формулы суммы n первых членов	1) Найти сумму девяти первых членов арифметической прогрессии 9, 13, 17,… 2) Найти a_{14} и d арифметической прогрессии, если $a_1=10$, $S_{14}=1050$. 3) Найти a_1 арифметической прогрессии, если $a_7 = 21$, $S_7 =205$. 4) Найти n в арифметической прогрессии 3, 5, 7 , 9, …, если $S_n = 63$.	1) Найти сумму первых семи членов геометр. прогрессии 5, 10, 20,… 2) Найти b_8 геометрической прогрессии, если $S_8 = 85$, $q = -2$. 3)Найти b_1 геометрической прогрессии, если $S_7 = 635$, $q = 2$. 4)Найти n в геометрической прогрессии 7, 21, 63, …, если $S_n =847$.	1) Найти сумму прогрессии -25, -5, -1, … . 2) Найти b_1 член, если $q =1/2$, $S =320$. 3)Найти q бесконечно убыв. геом. прогрессии , если $b_1= 40$, $S =60$.

12) Алгоритм решения задач на применение формулы суммы n первых членов прогрессий	Для того, чтобы *найти сумму n первых членов S_n* прогрессии (или первый член a_1, или n –й член a_n, или *ее разность* d, или *количество членов* n) необходимо: **1)** Найти или указать: • первый член a_1, разность d и n –количество членов (или (S_n, n, d), или (a_1, S_n, n), или (a_1, n, S_n), или (a_1, d, S_n)). **2)** Подставить найденные значения в формулу суммы n первых членов прогрессии. **3)** Решить полученное уравнение, относительно неизвестного. **4)** Записать ответ.	Для того, чтобы *найти сумму n первых членов S_n* прогрессии (или первый член b_1, или n –*й член* b_n, или *ее знаменатель* q, или *количество членов* n) необходимо: **1)** Найти или указать: • первый член b_1, знаменатель q и n – количество членов (или (q, S_n, n), или (q, S_n, n, b_1), или (b_1, S_n, n), или (b_1, S_n, q)). **2)** Подставить найденные значения в формулу суммы n первых членов прогрессии. **3)** Решить полученное уравнение, относительно неизвестного. **4)** Записать ответ.	Для того, чтобы *найти сумму S* (или b_1, или q) необходимо: 1) Найти или указать: • b_1 и q (или (S, q), или (S, b_1)). 2) подставить найденные значения в формулу суммы. 3) Решить полученное уравнение. 4) Записать ответ.

Рассмотрим примеры.

Рациональные уравнения

Пример 2.1 Решить уравнение:

$$2x+1+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots=\frac{13}{6},\ где\ |x|<1.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$(2x+1)+\left(x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots\right)=\frac{13}{6}.$$

Во второй скобке – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с $g=-x$.

$$2x+1+\frac{x^2}{1-(-x)}=\frac{13}{6} \quad \Rightarrow \quad 2x+1+\frac{x^2}{1+x}=\frac{13}{6}$$

$$12x+12x^2+6x^2+6x+6=13+13x \quad \Rightarrow \quad 18x^2+5x-7=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+504}}{36}=\frac{-5\pm 23}{36}$$

$$x_1=\frac{1}{2}, \qquad x_2=-\frac{7}{9}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{9}$.

П р и м е р 2.2. Найти все решения уравнения:

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = 3{,}5 \qquad |x| < 1$$

<u>Решение.</u>

Заменим данное уравнение ему равносильным

$-9x^2 - 9x + 2 = 0$, т.к. $x + x^2 + \ldots = \dfrac{x}{1-x}$ по формуле убывающей прогрессии. Решим полученное уравнение

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81-72}}{18} = \frac{9 \pm 3}{18} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Найденные значения x удовлетворяют условию $|x| < 1$.

Ответ: $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$. $x_1 = \frac{2}{3}$.

П р и м е р 2.3. Найти все решения уравнения:

$$\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^2 + 2x + 3\right) + \ldots + \left(x^2 + 20x + 39\right) = 4500.$$

<u>Решение.</u>

Левая часть уравнения – сумма арифметической прогрессии, в которой $a_1 = a^2 + x + 1$, $\quad d = x + 2$, $\quad a_n = x^2 + 20x + 39$.

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, найдём число слагаемых в левой части исходного уравнения:

$$x^2 + 20x + 39 = x^2 + x + 1 + (x+2)n - x - 2;$$

$$n = \frac{20x + 40}{x + 2} = 20.$$

Тогда по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ преобразуем левую часть исходного уравнения и получим:

$$\frac{x^2 + x + 1 + x^2 + 20x + 39}{2} \cdot 20 = 4500;$$

$$2x^2 + 21x + 40 = 450 \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2 + 21x - 410 = 0;$$

$$x = \frac{-21 \pm \sqrt{441 + 3280}}{} = \frac{-21 \pm 61}{18};$$

$1 \qquad 4 \qquad 4$

$x_1 = -20{,}5; \qquad x_2 = 10.$

Ответ: $x_1 = -20{,}5; \qquad x_2 = 10.$

Пример 2.4. **Н**айти все решения уравнения $\dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x-2}{x} + \ldots + \dfrac{1}{x} = 3.$

Решение.

Левая часть уравнения – сумма арифметической прогрессии, в которой $a_1 = \frac{x-1}{x}$, $d = -\frac{1}{x}$, $a_n = \frac{1}{x}$.

По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём число слагаемых в левой части исходного уравнения:

$$\frac{1}{x} = \frac{x-2}{x} - \frac{1}{x}n + \frac{1}{x};$$
$$n = \frac{x-1}{x} \cdot x;$$
$$n = x-1.$$

По формуле $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n$ преобразуем левую часть исходного уравнения.

$$S = \frac{\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x}}{2}(x-1);$$

$$\frac{x-1+1}{2x}(x-1) = 3 \quad \Rightarrow \quad x-1 = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

Ответ: $x = 7$.

Пример 2.5. Найти все решения уравнения $x-1+x-3+\ldots+x-27=70$.

Решение.

В левой части уравнения – сумма членов арифметической прогрессии, где $a_1 = x-1$, $a_n = x-27$.

Найдём разность данной прогрессии $d = x-3-x+1 = -2$. По формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$ найдём n:

$$x-27 = -1-2\cdot(n-1);$$
$$-26 = -2\cdot(n-1);$$
$$n = 14.$$

По формуле суммы n-первых членов арифметической прогрессии, найдём сумму для данной прогрессии:

$$S_n = \frac{1}{2}\cdot(x-1+x-27)\cdot 14 = (x-14)\cdot 14 = 70;$$
$$x-14 = 5;$$
$$x = 19.$$

Ответ: $x = 19$.

П р и м е р 2 . 6. Найти все решения уравнения $81 \cdot 0,(5)^{x-1} = 25$.
<u>Решение.</u>

Представим $0,(5)$ в виде обыкновенной дроби, используя формулу $S=\dfrac{b_1}{1-q}$, где $|q|<1$.

$$0,(5)=0,5+0,05+0,005+\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} b_1=0,5 \\ b_2=0,05 \\ q=\dfrac{1}{10} \end{array}\right. \Rightarrow \quad S=\frac{0,5}{1-\dfrac{1}{10}}=\frac{5}{9}$$

имеем $81\cdot\left(\dfrac{5}{9}\right)^{x-1}=\dfrac{25}{81} \quad \Rightarrow \quad x-1=2 \quad \Rightarrow \quad x=3.$

Ответ: $x=3$.

<u>Показательные и логарифмические уравнения</u>

Пример 2.7. Решить уравнение

$$3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45,5+22,75+11,375+\ldots$$

<u>Решение.</u>

Данное уравнение является показательным, причём в правой части записана сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $b_1=45,5$ и $q=\dfrac{22,75}{45,5}=0,5$.

1) Найдём сумму данной прогрессии по формуле суммы бесконечно убывающей прогрессии: $S=\dfrac{45,5}{1-0,5}=91$.

2) Запишем уравнение в следующем виде $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=91$ или $3^{x-9}\cdot\left(3^4+3^2+1\right)=91$, произведём необходимые вычисления и получим, что $3^{x-9}\cdot 91=91$ или $3^{x-9}=1$, или $3^{x-9}=3^0$, отсюда $x-9=0$, или $x=9$.

Ответ: $x=9$.

Пример 2.8. Решить уравнение $\lg x+\lg x^2+\lg x^4+\ldots+\lg x^{256}=5$.

<u>Решение.</u>

Заметим, что в левой части уравнения – сумма десятичных логарифмов.

1) ООУ: $x>0$.

2) Пользуясь свойством логарифма, преобразуем данное уравнение:

$$\lg x + 2 \cdot \lg x + 4 \cdot \lg x + \ldots + 256 \lg x = 5 .$$

3) Заметим, что в левой части уравнения записана сумма геометрической прогрессии, у которой $b_1 = \lg x$, $q = 2$; используя формулу n-го

члена геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, найдём количество n членов данной прогрессии:

$$\lg x^{256} = \lg x \cdot 2^{n-1}, \text{ т.ё. } \lg x^{256} = \lg x^{2n-1}, \text{ отсюда } x^{256} = x^{2^{n-1}}, \text{ тогда}$$

$$2^9 = 2^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 9 = n-1, \text{ следовательно, } n = 9.$$

4) Применим формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии $S_n = b_1 \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}$ для заданной суммы:

$$\lg x \cdot \frac{1-2^9}{1-2} = 5, \text{ тогда } \lg x = \frac{5}{511}, \text{ следовательно,}$$

$x = 10^{\frac{5}{511}} = 10^{0,0098} = 1,023,$ что удовлетворяет ООУ.

Ответ: $x = 1,023$.

П р и м е р 2.9. Найти *x*, если числа $\lg 2,\ \lg\left(2^x - 1\right),\ \lg\left(2^x + 3\right)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

<u>Решение.</u>

Т.к. числа $\lg 2,\ \lg\left(2^x - 1\right),\ \lg\left(2^x + 3\right)$ образуют арифметическую прогрессию, то для них выполняется характеристическое свойство, т.е. $2 \cdot \lg\left(2^x - 1\right) = \lg 2 + \lg\left(2^x + 3\right)$.

1) Решим полученное логарифмическое уравнение.

1.1) ОУУ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2^x - 1 > 0, \\ 2^x + 3 > 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ 2^x > 1, \\ 2^x > -3; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x > 0.$$

1.2) $\left(2^x - 1\right)^2 = 2 \cdot \left(2^x + 3\right)$, раскроем скобки

$$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 2 \cdot 2^x + 6 \quad \Rightarrow \quad 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 5 = 0,$$

обозначим $2^x = t$, причём $t > 0$, тогда

$$t^2 - 4t - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3.$$

Следовательно, $t_1 = 5,\ t_2 = -1$.

$t_2 = -1 < 0$, не удовлетворяет условию $t > 0$.

Значит $2^x = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \log_2 5$.

2) $x = \log_2 5$ – полученное значение удовлетворяет ООУ, следовательно, можно записать ответ.

Ответ: $x = \log_2 5$.

Тригонометрические уравнения

Пример 2.10. Показать, что значения функции $tg\alpha$ углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

Решение.

Необходимо показать, что значения функции $tg\alpha$ углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

1) Найдём значения функции $tg\alpha$ при значениях $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

2) Для того чтобы проверить является ли последовательность значений функции $tg\alpha$ возрастающей геометрической прогрессией, проверим выполнимость характеристического свойства:

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sqrt{3},$$

$1 = \frac{3}{3}$ или 1=1, действительно данная последовательность является геометрической прогрессией.

3) Т.к. $\frac{3}{\sqrt{3}} > 1$, то данная геометрическая прогрессия является возрастающей.

Ответ: значения функции $tg\alpha$ углов $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ образуют возрастающую геометрическую прогрессию.

П р и м е р 2.11. Найти всем значения x, удовлетворяющие неравенству $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$, при которых числа $2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}$, $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{5\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

Решение.

Необходимо найти все значения x, удовлетворяющие неравенству $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$, при которых числа $2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}$, $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{5\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

1) Если данные числа составляют геометрическую прогрессию, то для них должно выполняться характеристическое свойство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)}=2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}\cdot\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{5\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

2) Решим полученное уравнение:

$$2^{2\cdot\left(-\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\right)}=2^{\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)}\cdot 2^{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$-2\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(5x-\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$-2\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1-\sin 2x)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ 1-\sin 2x=0,\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3},\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\end{array}\right. \qquad n,k\in Z.$$

3) Остаётся проверить условие задачи, что $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$, очевидно что серия $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$ не удовлетворяет этому равенству.

4) Для серии $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}$ имеем $tg\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=tg\frac{\pi k}{3}>0$, при

4 3

$k = 3m + 1,$ что и даёт решение $x = \dfrac{7\pi}{12} + \pi m,$ где $m \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{7\pi}{12} + \pi m,$ где $m \in Z$.

Пример 2.12. Решить уравнение

$$\frac{1+tgx+tg^2x+\ldots+tg^nx+\ldots}{1-tgx+tg^2x+\ldots+(-1)^n tg^nx+\ldots}=1+\sin 2x, \qquad где\ |tgx|<1.$$

Решение.

Дано тригонометрическое уравнение, причём и в числителе, и в знаменателе левой части уравнения записана сумма бесконечно убывающей прогрессии.

1) ООУ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \ где\ \ k\in Z.$

2) Упростим числитель и знаменатель, используя формулу суммы бесконечно убывающей прогрессии $S=\frac{b_1}{1-q}$, тогда получим

$$\frac{\frac{1}{(1-tgx)}}{\frac{1}{(1+tgx)}}=1+\sin 2x \qquad\Rightarrow\qquad \frac{1+tgx}{1-tgx}=1+\sin 2x\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}-(\cos x+\sin x)^2=0, \qquad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=0,\\ \dfrac{1}{\cos x-\sin x}-(\cos x+\sin x)=0.\end{array}\right.$$

Первое уравнение не имеет корней, т.к. по условию $|tgx|<1$, а второе равносильно уравнению $\cos 2x=1,\ \ x=\pi n,\ \ n\in Z$.

3) Полученное решение удовлетворяет ООУ.

Ответ: $x=\pi n,\ \ n\in Z$.

Пример 2.13. Даны три последовательных члена арифметической прогрессии $\sin x, \sin 2x,\ \sin 3x$. Найти x.

Решение.

1) Так как данные числа являются последовательными членами арифметической прогрессии, то для них выполняется характеристическое свойство: $2\cdot\sin 2x=\sin x+\sin 3x$.

2) Решим полученное уравнение:

$$2\cdot\sin 2x=\sin x+\sin 3x \quad\Rightarrow\quad 2\cdot\sin 2x=2\cdot\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2x = \sin 2x \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad \sin 2x \cdot (1 - \cos x) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \cos x = 1; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n, \\ x = 2\pi k; \end{array}\right. \quad n, k \in Z \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi n}{2}, \\ x = 2\pi k; \end{array}\right. \Rightarrow x = \frac{\pi n}{2}, \; n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi n}{2}, \; n \in Z$.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
Решить уравнения 1-4, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = \frac{b_1}{1-g}$, *где* $\lvert g \rvert < 1$	
1. $\sqrt[x]{12} \cdot \sqrt[x]{3} = 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \ldots$	$x = 2$.
2. $\left(\sqrt{12}\right)^x \cdot \left(\sqrt{3}\right)^x = 12 + 8 + \frac{16}{3} + \ldots$	$x = 2$.
3. $2\ {}_2 \quad = 8 + 4 + 2 + \ldots$	$x = -1$.
4. $(0{,}5)^{x^2-5{,}5} \cdot \sqrt{0{,}5} = 16 + 8 + 4 + \ldots$	$x = 0$.
Решить уравнения	
5. $\frac{(x-1)}{x^2} + \frac{x-2}{x^2} + \ldots + \frac{x-3}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{7}{15}$	$x = 15$.
6. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 2$	$x = \frac{1}{2}$.
7. $(x+1) + (x+4) + (x+7) + \ldots + (x+28) = 155$	$x = 1$.
8. $\frac{2x^2+2}{x} + 2x - 2x^3 + 2x^5 - 2x^7 + \ldots = \frac{29}{5}$	$x = \frac{1}{2}$.
9. $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$	$x = 7$.
10. $\log_k x + \log_{k^{\frac{1}{2}}} x + \ldots + \log_{k^{\frac{1}{k}}} x = \frac{k+1}{2}$, *где* $k \in N$	$x = k^{\frac{1}{k}}$, *при* $k > 0, k \neq 1$
11. При каких значениях *x* и *y* последовательность t_1, t_2, t_3, *где* $t_1 = 8^{x+\log_2 y}, t_2 = 2^{x-\log_2 y}, t_3 = 5 \cdot y$, является одновременно арифметической и геометрической прогрессией.	$x = \frac{1}{2}\log_2 5, \; y = 5^{-\frac{1}{4}}$.
12. Определить при каких значениях *x* числа a_1, a_2, a_3, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию: $a_1 = \lg 2, \; a_2 = \lg\left(3^x - 3\right), \; a_3 = \lg\left(3^x + 9\right)$	$x = 2$.
13. Три числа *a, b, c* являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти	$\frac{1}{2}$.

$$\frac{\log_b 3\cdot\left(\log_a^2 c-\log_c a^{\frac{1}{2}}\right)}{\log_a 9-2\cdot\log_c 3}$$	
14. Найти все значения x, при которых числа $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3\cos\left(5x+\frac{3\pi}{4}\right)}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)}$, $5^{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.	$x=\frac{\pi}{12}+2\pi m,$ $x=\frac{5\pi}{12}+2\pi k,$ *где* $k,m\in Z$
15. Решить уравнение $\frac{1+\sin x+\sin^2 x+\ldots+\sin^n x+\ldots}{1-\sin x+\sin^2 x+\ldots+(-1)^n\sin^n x+\ldots}=\frac{1}{1+tg^2 x}$, *где* $\lvert\sin x\rvert\neq 1.$	$x=\pi n,\ n\in Z$.
16. При каких значениях α числа $2\cdot\cos\frac{\pi}{6}$, $4\cdot\sin\alpha,\ 6\cdot\sin(\pi-\alpha)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?	$\alpha=(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$.
17. Числа $1-\cos 2x$, $\cos x-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\sin(-2x)$ являются членами геометрической прогрессии с номерами k, $k+1$, $k+2$ соответственно. Найти все значения x и k, если известно, что 15-й член этой прогрессии равен $\frac{27}{8}$.	$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z$ $k=17$
18. Найти положительные значения a, для которых все различные неотрицательные x, удовлетворяющие уравнению $\cos((8a-3)\cdot x)=\cos((14a+5)\cdot x)$ и расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию.	$a\in\left\{\frac{1}{30},\frac{2}{19},\frac{3}{8},\frac{7}{5},\frac{11}{2}\right\}$.

3. Уравнения, при решении которых используется ограниченность функций

Теоретической базой решения уравнений с использованием ограниченности функций являются понятие ограниченности функции, сопутствующие понятия и специальная теорема.

Определение 1. *Функция $y=f(x)$ называется ограниченной на промежутке J, если существуют числа A и B такие, что для всех значений $x\in J$ справедливо неравенство $A\leq f(x)\leq B$.* (*)

Из этого определения следует, что если функция $y=f(x)$ на промежутке J принимает своё наименьшее значение m и наибольшее значение M, то она ограничена на промежутке J, для этого достаточно положить $A=m$, $B=M$.

Функции, не являющиеся ограниченными на промежутке J, называются неограниченными. Иногда функция $y = f(x)$ на промежутке J удовлетворяет только одному из неравенств (*). В связи с этим введем ещё одно определение.

Определение 2. *Если существует число A, такое, что для всех $x \in J$ выполняется неравенство $f(x) \geq A$, то функция $y = f(x)$ называется ограниченной снизу на промежутке J.*

Если же существует число B, такое, что для всех $x \in J$ выполняется неравенство $f(x) \leq B$, то функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху.

Примеры.

1) $y = \cos x$ - функция ограниченная, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2) $y = |x|$ - функция ограниченная снизу, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $|x| \geq 0$.

3) $y = -x^2 + 2 - 6x$ - функция ограниченная сверху, т.к. для всех $x \in R$ справедливо неравенство $y \leq 11$. (Дана квадратичная функция с коэффициентом $a = -1 < 0$ и абсциссой вершины $x_0 = -\frac{-6}{-2} = -3$, при $x \in R$ $y \leq y(x_0)$, где $y(x_0) = -9 + 2 + 18 = 11$).

Исследуйте на ограниченность следующие функции.

1	$y = \lvert\sin 2x\rvert$	6	$y = \cos^2 \frac{x}{2}$
2	$y = \log_3 (x^2 - 4x + 7)$	7	$y = 4 - \sin x$
3	$y = \arcsin x$	8	$y = \frac{1}{4^{\sin x \cos x}}$
4	$y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	9	$y = \sqrt{tg^2 x + 3}$
5	$y = \sqrt{x - 1}$	10	$y = \left\lvert \log_{\frac{1}{2}} x \right\rvert$

Ответы:

1	$0 \leq y \leq 1$	6	$0 \leq y \leq 1$
2	$y \geq 1$	7	$3 \leq y \leq 5$

3	$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$	8	$\frac{1}{2} \le y \le 2$. Так как $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x;\ -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$, значит $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}\sin 2x} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

4	$y \geq 2$. Воспользоваться свойством $t + \frac{1}{t} \geq 2, t > 0$	9	$y \geq \sqrt{3}$
5	$y \geq 0$	10	$y \geq 0$

Обучая учащихся понятию ограниченности функции:

1) Составить совместными усилиями обобщающую таблицу множеств значений функций (МЗФ):

Функция	ООФ	МЗФ
$y = kx + b$	$x \in R$	$y \in R$, *если* $k \neq 0$ $y = b$, *если* $k = 0$
$y = a^2 x + bx + c$	$x \in R$	$a > 0,\ y \geq y(x_0),\ x_0 = -\frac{b}{2a}$ $a < 0,\ y \leq y(x_0),\ x_0 = -\frac{b}{2a}$
$y = \frac{k}{x}$	$x \neq 0$	$y \neq 0$
$y = a^x$	$x \in R$	$y > 0$
$y = \log_a x$	$x > 0$	$y \in R$
$y = \sin x$	$x \in R$	$y \in [-1;1]$
$y = \cos x$	$x \in R$	$y \in [-1;1]$
$y = tgx$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	$y \in R$
$y = ctgx$	$x \neq \pi k,\ k \in Z$	$y \in R$
$y = \arcsin x$	$x \in [-1;1]$	$y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$x \in [-1;1]$	$y \in [0; \pi]$
$y = arctgx$	$x \in R$	$y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$y = arcctgx$	$x \in R$	$y \in (0; \pi)$

2) Отработать умения пользоваться ею и умения находить множества значений сложных функций: $y = f(|x|)$; $y = \sqrt{f(x)}$; $y = \log_a f(x)$; $y = a^{f(x)}$; $y = f(\sin x)$ и т.д.

Введём специальную **теорему**, используемую при решении некоторых нестандартных уравнений.

Если функция $f(x)$ на промежутке X ограничена сверху, причём её наибольшее значение равно A, а другая функция $g(x)$ на этом промежутке *ограничена снизу, причём её наименьшее значение равно A, то уравнение* $f(x)=g(x)$ *равносильно системе* $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=B. \end{cases}$

Из теоремы следует **алгоритм решения уравнений методом оценки** или методом использования экстремальных значений функций:

1) *найти область определения уравнения;*
2) *оценить левую и правую части данного уравнения;*
3) *если функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, удовлетворяют сформулированной теореме, то вместо данного уравнения решать соответствующую систему уравнений..*

Рассмотрим примеры уравнений, решаемых с использованием метода оценки.

Пример 3.1. Решить уравнение $4\cos = 4 + x^2$.

Решение

Оценим левую и правую части уравнения:

$$f(x) = 4\cos x, \qquad -4 \le 4\cos x \le 4.$$
$$g(x) = 4 + x^2, \qquad 4 + x^2 \ge 4.$$

Так как левая и правая части уравнения удовлетворяют условию теоремы, то данное уравнение можно заменить системой: $\begin{cases} 4\cos x = 4 \\ 4 + x^2 = 4. \end{cases}$ Из второго уравнения находим $x=0$. Подставив $x=0$ в первое уравнение, получаем верное числовое равенство, следовательно, $x=0$ - корень данного уравнения.

Ответ: $x=0$.

Пример 3.2. Решить уравнение $e^{x^2} + 4 = \sqrt[6]{64 - x^4} + \log_3(27 - x^2)$.

Решение

Оценим левую и правую части уравнения:

$f(x) = e^{x^2} + 4$, т.к. $e^{x^2} \ge 1$, то $e^{x^2} + 4 \ge 5$;

$g(x) = \sqrt[6]{64 - x^4} + \log_3(27 - x^2)$, т.к. $0 \le \sqrt[6]{64 - x^2} \le 2$, $27 - x^2 \le 27$, $\log_3(27 - x^2) \le 3$, то $g(x) \le 5$.

Так как условие теоремы выполняется, заменим данное уравнение равносильной ему системой уравнений $\begin{cases} e^{x^2} + 4 = 5, \\ \sqrt[6]{64 - x^4} + \log_3(27 - x^2) = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ 2 + 3 = 5. \end{cases}$

Ответ: $x=0$.

Пример 3.3. Решить уравнение $\sin^2 2x+\cos^6 \frac{x}{2}+6\sin 5x=9$.

Решение

Так как левая часть уравнения принимает значения не больше 8, а правая часть равна 9, то данное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

П р и м е р 3.4. Решить уравнение $2\cos^2\dfrac{x^2+x}{6}=2^x+2^{-x}$.

<u>Решение</u>

Данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases}2\cos^2\dfrac{x^2+x}{6}=2,\\ 2^x+2^{-x}=2.\end{cases}$ При оценке выражения 2^x+2^{-x} воспользовались неравенством $t+\dfrac{1}{t}\ge 2$, где $t=2^x, t>0$, которое можно доказать. Из второго уравнения системы следует, что $x=0$, которое удовлетворяет первому уравнению.

Ответ: $x=0$.

Анализируя решённые примеры, можно сделать вывод, о том, что **метод оценки** можно применять:

1. *если в одной части уравнения функция, ограниченная сверху, а в другой, ограниченная снизу* (примеры: 3.1; 3.2; 3.4);
2. *если в уравнении содержатся функции разного вида* (примеры: 3.1; 3.2; 3.4);
3. *если в одной части уравнения ограниченная функция, а в другой – константа* (пример 3.3).

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $3^{\lvert\sin\sqrt{x}\rvert}=\lvert\cos x\rvert$	$x=0$. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}3^{\lvert\sin\sqrt{x}\rvert}=1,\\ \lvert\cos x\rvert=1.\end{cases}$.
2. $\sin\dfrac{x}{3}-\cos 6x=2$	$x=\dfrac{3}{2}\pi+6\pi n, n\in Z$. Свести исходное уравнение к системе: $\begin{cases}\sin\dfrac{x}{3}=1,\\ \cos 6x=-1.\end{cases}$
3. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin 3x=1$	$x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in Z$. Свести исходное уравнение к совокупности систем.

4. $\log_2\left(x^2+4\right)-\log_2 x=4x-x^2-2$	$x=2$. Заменив в области определения уравнения ($x>0$) данное уравне-

	ние на равносильное $\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)=4x-x^2-2$, оценим левую и правую части полученного уравнения. Т.к. $x+\frac{4}{x}\ge 4$, то $f(x)=\log_2\left(x+\frac{4}{x}\right)\ge 2$; $4x-x^2-2\le 2$.
5. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}+2\sqrt{x^2+7x}=3-2x$	$x=0$. При $x\ge 0$ левая часть уравнения не меньше 3, а правая не больше 3.
6. $\sqrt{x}+\sqrt{x+9}=2$	$x\in\varnothing$. При $x\ge 0$ левая часть уравнения не меньше 3, а правая часть равна2.
7. $\cos\pi x=x^2-4x+5$	$x=2$. Левая часть уравнения не больше 1, а правая не меньше 1.
8. $3^{\lvert x\rvert}=\cos\frac{x}{3}$	$x=0$. Левая часть уравнения не меньше 1, а $-1\le\cos\frac{x}{3}\le 1$.
9. $2\cos\frac{x}{3}=5^x+5^{-x}$	$x=0$.
10. $3^{\lvert\sin\sqrt{x}\rvert}=\lvert\cos x\rvert$	$x=0$.
11. $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. $\sin^5 x+\cos^5 x\le 1,\ 2-\sin^4 x\ge 1$ из чего следует, что данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin^5 x+\cos^5 x=1\\ 2-\sin^4 x=1\end{cases}$.
12. $\cos^{10} x+\sin^{50} x=1$	$x=\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$. Воспользоваться свойством чётных степеней $\sin x$ и $\cos x$ $\cos^{10} x\le\cos^2 x$, $\sin^{50} x\le\sin^2 x$ и теоремой о сложении неравенств одинакового смысла и перейти к совокупности систем простейших уравнений.

13. $\sin^4 2x+\cos^8 \frac{2}{3}x+7\sin x=11$	нет решения. Оценить каждое слагаемое левой части уравнения и сложить неравенства одинакового смысла.
14. $\cos\frac{\pi x}{6}=-x^2+12x-37$	$x=6$. Применить метод оценки.
15. $8\sin\frac{\pi}{10}x=x^2-10x+33$	$x=5$.
16. $2\log_2\left(4x-x^2-2\right)=2$	Применить метод оценки. $x=2$.
17. $14^{\lvert 1-x\rvert}=\sin^2\frac{\pi x}{2}$	$x=1$. Применить метод оценки.
18. $\sqrt{3y^2+6y+7}+\sqrt{5y^2+10y+14}=4-2y-y^2$	$x=-1$. При оценке левой и правой частей воспользоваться выделением полного квадрата.
19. $3+\left(x-\pi\right)^2=1-2\cos x$	$x=\pi$.
20. $\sqrt[4]{\log_5^4\left(x^2-3x+3\right)+1}=\cos^4\left(\left(x-2\right)\cdot\sin\left(2x+1\right)\right)$	$x=2$. Применить метод оценки.

4. Уравнения, при решении которых используется монотонность функций

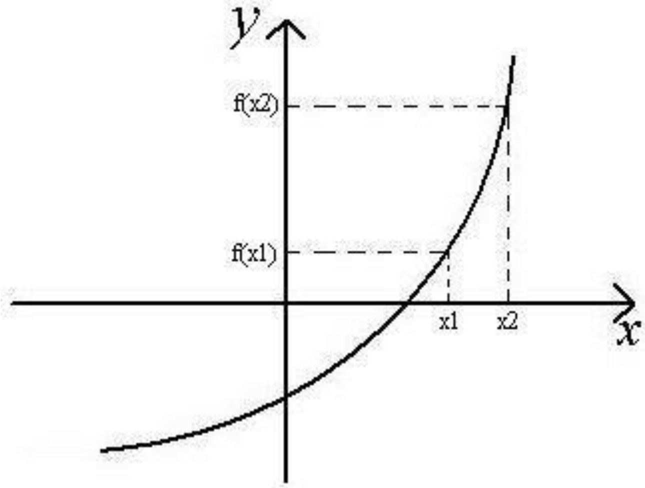
Прежде, чем рассматривать виды уравнений, решаемых указанным способом, рассмотрим понятие монотонности функции и специальную теорему, лежащую в основе способа.

Определение 1. *Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (неубывающей) на множестве X, если для любых $x_1\in X$ и $x_2\in X$ из неравенства $x_1<x_2$*

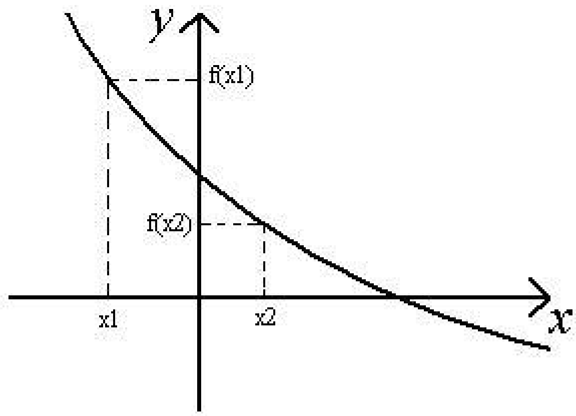
следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)\le f(x_2)$).

Определение 2. *Функция $y=f(x)$ называется убывающей (невозрастающей) на множестве X, если для любых $x_1\in X$ и $x_2\in X$ из неравенства $x_1<x_2$*

следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$($f(x_1)\ge f(x_2)$).



ысл введенных понятий



растающей функции увеличивается (рис. 1), а ордината убывающей функции уменьшается (рис. 2).

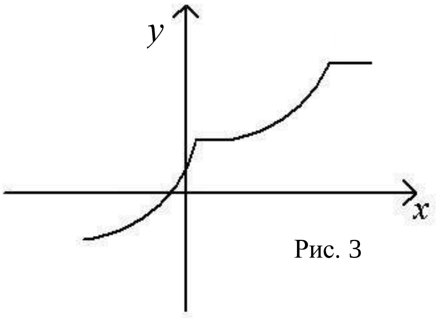


Рис. 3

Если функция невозрастающая (или неубывающая), то её график может иметь участки постоянства (рис. 3).

<u>**Определение 3.**</u> *Возрастающие и убывающие функции называются монотонными функциями.*

Используя геометрический смысл чётности и нечётности функций, можно установить связь возрастания (убывания) с чётностью и нечётностью функции.

1^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X чётна и возрастает при $x>0$, то она убывает при $x<0$ (рис. 4).

2^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X чётна и убывает при $x>0$, то она возрастает при $x<0$ (рис. 5).

3^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X нечётна и возрастает при $x>0$, то она возрастает при $x<0$; кроме того, она возрастает на всём множестве X (рис. 6).

4^0. Если функция $y=f(x)$ на множестве X нечётна и убывает при $x>0$, то она убывает и при $x<0$; кроме того, она убывает на всём множестве X (рис. 7).

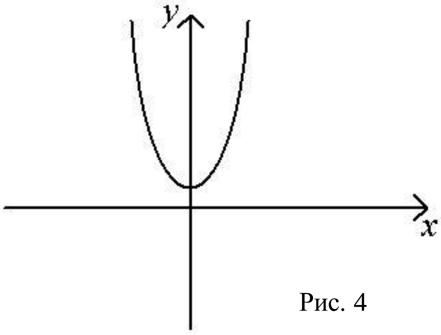


Рис. 4

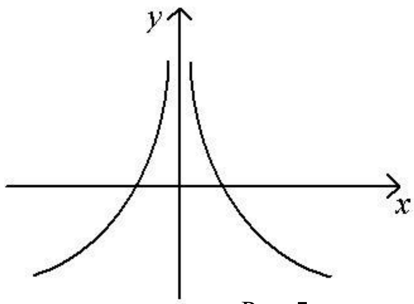


Рис. 5

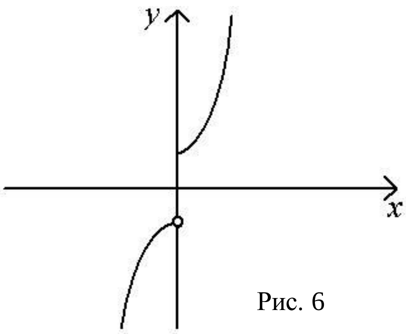


Рис. 6

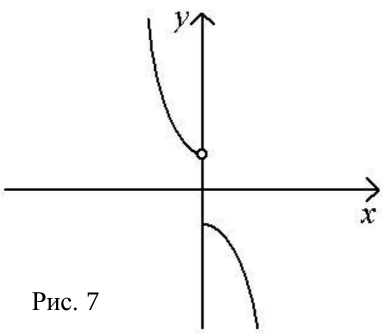


Рис. 7

Из приведённых фактов следует **алгоритм исследования функции на монотонность** элементарными средствами.

1. Установить ООФ и исследовать на чётность.

Взять $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 < x_2$ и установить знак разности $f(x_1) - f(x_2)$

32

Взять $x_1 \in ООФ, x_2 \in ООФ, x_1 < x_2$ и установить знак разности $f(x_1) - f(x_2)$

2. Если функция $f(x)$:

является чётной	является нечётной	является ни чётной, ни нечётной

Можно исследование на монотонность проводить средствами математического анализа, используя достаточные признаки монотонности.

5^0. Достаточный признак возрастания функции

Если $f(x_1)-f(x_2)<0$, сделать вывод, что $y=f(x)$ возрастает при $x>0$, а значит, возрастает при $x\in ООФ$.	Если $f(x_1)-f(x_2)>0$, сделать вывод, что $y=f(x)$ убывает при $x>0$, а значит и при $x<0$ убывает.	Если $f(x_1)-f(x_2)<0$, то сделать вывод, что $y=f(x)$ возрастает при $x\in ООФ$.	Если $f(x_1)-f(x_2)>0$, то сделать вывод, что $y=f(x)$ убывает при $x\in ООФ$.

Если $f'(x)>0$ *в каждой точке интервала* ***J****, то функция* $y=f(x)$ *возрастает на* ***J****.*

6^0. Достаточный признак убывания функции

Если $f'(x)<0$ *в каждой точке интервала* ***J****, то функция* $y=f(x)$ *убывает на* ***J****.*

Алгоритм исследования функции на монотонность средствами математического анализа:

1. Установить ООФ.
2. Найти $f'(x)$.
3. Решить неравенства $f'(x)<0$ и $f'(x)>0$.
4. Проверив непрерывность функции на концах промежутков возрастания и убывания, записать ответ.

Рассмотрим образцы примеров исследования функции на монотонность.

Пример 4.1. Исследовать на монотонность функцию $y = x^3$.

<u>Решение.</u>

<u>1 способ.</u>

1) ООФ: $x \in R$; функция нечётная.

2) Пусть $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ и $x_1 < x_2$, тогда $f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_1 x_2 + x_2) < 0 \Rightarrow y = x^3$ возрастает при $x \in (0; \infty)$. Т.к. $y = x^3$ - функция нечётная, то она возрастает и при $x < 0$.

3) На основании свойств нечётной функции и непрерывности $y = x^3$ в точке $x = 0$, делаем вывод, что $y = x^3$ возрастает

при $x \in R$.

<u>2 способ.</u>

1) ООФ: $x \in R$.

2) $y' = 3x^2$.

3) $3x^2 > 0$ при $x \in R$.

4) Следовательно, функция возрастает при $x \in R$.

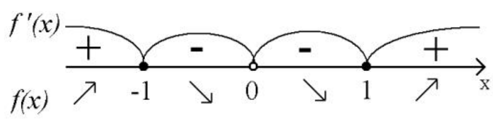
Пример 4.2 Исследовать на монотонность $f(x) = 2x + \frac{2}{x}$.

<u>Решение.</u>

1) ООФ: $x \neq 0$.

2) $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$.

3) $f'(x) = 0$ при $x = \pm 1$. Точки 0, 1, -1 разбивают ООФ, на 4 промежутка. Определим знак $f'(x)$ на каждом из них.



4) Т.к. в точках ± 1 функция непрерывна, то ответ будет следующим: функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$, $[1; \infty)$; убывает на промежутках $[-1; 0)$, $(0; 1]$.

Рассмотрим специальную **теорему**, устанавливающую связь монотонности функций, входящих в уравнение, с количеством корней соответствующего уравнения:

1) Если одна из функций возрастает, а другая убывает на промежутке X, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке X.

2) Если одна из функций возрастает (убывает), а другая принимает постоянные значения на промежутке X, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня (один или не одного) на промежутке X.

Из теоремы следует **алгоритм решения уравнений методом использования монотонности:**

1) *Исследовать на монотонность функции $f(x)$ и $g(x)$ в области определения уравнения.*

2) *Если выполняются условия теоремы для функций $f(x)$ и $g(x)$ и удаётся подобрать x_0, удовлетворяющее уравнению $f(x)$ и $g(x)$, то x_0 - единственный корень этого уравнения.*

Рассмотрим примеры решения уравнений методом использования монотонности функций.

Пример 4.3. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 4$.

Решение

Исследуем на монотонность функции $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ и $g(x) = x - 4$ в области определения уравнения $x > 0$. Функция $f(x)$ убывает, функция $g(x)$ возрастает. Уравнению удовлетворяет $x = 3$. Следовательно, согласно теореме, это единственный корень.

Ответ: $x = 3$.

Пример 4.4. Решить уравнение $7^x + 2^x = 9$.

Решение

Функция $f(x) = 7^x + 2^x$ возрастает при $x \in R$, функция $g(x) = 9$ принимает постоянные значения при $x \in R$. Следовательно, $x = 1$ - единственный корень уравнения.

Ответ: $x = 1$.

Пример 4.5. Решить уравнение $2x^5 + x^3 + 5x - 80 = \sqrt[3]{14 - 3x}$.

Решение

Исследуем функцию $f(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 80$ на монотонность. Применим для исследования производную: $f'(x) = 10x^4 + 3x^2 + 5$, т.к. $D = b^2 - 4ac = 9 - 200 < 0$, то $f'(x) > 0$ при $x \in R$, т.е. $f(x)$ - возрастающая функция. Исследуем на монотонность функцию $g(x) = \sqrt[3]{14-3x}$; $g'(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}}$

<0 при $x \neq \frac{4}{3}$, т.е. $g(x)$ - убывающая функция. Так как функция $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то $x=2$ - единственный корень.

Ответ: $x=2$.

Пример 4.6. Решить уравнение $2x^3 + 9x^2 + 150x - 161 = 0$.

Решение

Исследуем на монотонность $f(x)=2x^3+9x^2+150x-161$.

$f'(x)=8x^2+18x+150$. $D=81-1200<0$, $f'(x)>0$ при $x\in R$, следовательно, функция $f(x)$ возрастает, а значит, каждое своё значение принимает единственный раз. При $x=1$ $f(x)=0$.

Ответ: $x=1$.

Пример 4.7. Решить уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

<u>Решение</u>

$x=2$ удовлетворяет уравнению, но утверждать, что это единственный корень, нельзя. Преобразуем уравнение к виду $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1$. В левой части полученного уравнения сумма

убывающих функций (основания показательных функций положительны и меньше 1), следовательно, левая и правая части уравнения удовлетворяют условию теоремы, а значит $x=2$ - единственный корень.

Ответ: $x=2$.

Анализируя решённые примеры, можно сделать вывод о том, **к каким типам уравнений можно пытаться применить рассмотренный метод:**

1) *Если в уравнение входят функции разного вида* (примеры: 4.3; 4.5).

2) *Если в одной части уравнения возрастающая, а в другой соответственно убывающая или постоянная функция* (примеры: 4.3; 4.4; 4.5; 4.6).

3) *Если в обеих частях уравнения функции одинаковой монотонности, но уравнение можно свести к уравнениям предыдущего вывода* (пример: 4.7).

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $x+3=2^{3-x}$	$x=1$. Исследовать на монотонность части данного уравнения.
2. $3-tgx=14^x+2\cdot 5^x$	$x=0$. Исследовать на монотонность левую и правую части уравнения и сделать вывод на основании теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
3. $8x^3+3x^2+42x=52$	$x=1$. Исследовать на монотонность с помощью производной левую часть и сделать вывод на основании соответствующей теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.

4. $2^x - 8^x + 6^x = 0$	$x = 1$. Привести уравнение к виду $\left(\frac{2}{8}\right)^x + \left(\frac{6}{8}\right)^x = 1$ и применить соответствующую теорему о монотонности функций, входящих в уравнение.

5. $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{7}{5}=2^x$	$x=1$. В левой части уравнения убывающая функция, а в правой – возрастающая.
6. $5^x+2^{x+1}\cdot 3^x=9^x+4^x$	$x=2$. Преобразовать уравнение к виду $5^x=\left(3^x-2^x\right)^2$, а затем к виду $\left(\sqrt{5}\right)^{2x}=\left(3^x-2^x\right)^2$, $\left\|\left(\sqrt{5}\right)^x\right\|=\left\|3^x-2^x\right\|$, $\left(\sqrt{5}\right)^x=3^x-2^x$, $\left(\sqrt{5}\right)^x+2^x=3^x$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$.
7. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$	$x_1=\frac{1}{4}$, $x_2=2$. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, получим $\log_2 x=\frac{1-x\pm(x-5)}{2}$ или $\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-2,\\ \log_2 x=3-x;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{4},\\ x=2;\end{array}\right.$ используя монотонность функций в области определения уравнения.
8. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$	$x=100$. Левая часть уравнения – возрастающая функция, правая – убывающая.
9. $x^{\lg^2 x}+10^{\lg x}=20$	$x=10$. Т.к. $x=10^{\lg x}$, - преобразовать исходное уравнение к виду $10^{\lg^3 x}=20-x$. В левой части уравнения возрастающая функция, а в правой – убывающая.
10. $\frac{x^2-4x+4}{x-5}-(x-8{,}1)^{\log_{x-8,1}\frac{97}{8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$	$x=9$. Преобразовать к виду $\frac{(x-2)^2}{x-5}-\frac{97}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$ и применить метод использования монотонности функций в области определения уравнения.
11. $x+2=7^{6-x}$	$x=5$. В левой части уравнения возрастающая функция, а в правой – убывающая.
12. $12^x+7^x=19^x$	$x=1$. Преобразовать уравнение к виду $\left(\frac{12}{19}\right)^x+\left(\frac{7}{19}\right)^x=1$. Уравнение удовлетворяет условию теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
13. $5^{\sqrt{x}}-13^{\sqrt{x}}+12^{\sqrt{x}}=0$	$x=4$. Преобразовать уравнение к виду

	$\left(\frac{5}{13}\right)^x+\left(\frac{12}{13}\right)^x=1$. Уравнение удовлетворяет условию теоремы о монотонности функций, входящих в уравнение.
14. $2-tgx=2^x+5^x$	$x=0$. В левой части уравнения убывающая функция при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, в правой – возрастающая.

5. <u>*Уравнения с двумя неизвестными*</u>

Под уравнением с двумя неизвестными будем понимать уравнения вида $f(x;y)=0$.

Рассмотрим четыре способа решения уравнений с двумя неизвестными.

<u>1 способ.</u> Использование условия равенства нулю суммы неотрицательных чисел. Сущность способа – замена исходного уравнения системой уравнений.

Теоретической основой способа является утверждение:

Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое из чисел равно нулю.

Из вышесказанного следует, что представляемый метод применим к уравнениям вида

$$f^{2k}(x;y)+g^{2n}(x;y)+\ldots+\varphi^{2m}(x;y)=0 \qquad (*)$$

$$\sqrt[2k]{f(x;y)}+g^{2n}(x;y)=0 \qquad (**)$$

$$|f(x;y)|+g^{2m}(x;y)=0 \qquad (***)$$

и другие аналогичные виды.

Алгоритм метода:

1. Сравнить данное уравнение с перечисленными выше видами.
2. Если уравнение имеет вид (*), (**) или (***), то заменить данное уравнение равносильной системой

$$\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \\ \ldots\ldots \\ \varphi(x;y)=0 \end{cases}$$

3. Решить полученную систему в области определения уравнения (ООУ) и записать ответ.

Пример 5.1. Решить уравнение

$$\ln^6\left(x^2-2x-14\right)+\sqrt{x^4+2x^3-27}+|y-1|=0.$$

<u>Решение.</u>

1) Уравнение имеет вид

$$f^{2k}(x)+\sqrt{g(x)}+|\varphi(x;y)|=0$$

2) Заменим данное уравнение равносильной ему системой уравнений:

$$\begin{cases}\ln^6(x^2-2x-14)=0,\\ \sqrt{x^4+2x^3-27}=0,\\ |y-1|=0;\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}\ln(x^2-2x-14)=0, & (1)\\ x^4+2x^3-27=0, & (2)\\ y-1=0. & (3)\end{cases}$$

3) Решим первое и третье уравнения полученной системы:

$$\ln(x^2-2x-14)=0 \qquad\qquad y-1=0$$

$$x^2-2x-14=0 \qquad\qquad y=1$$

$$x_1=5 \quad x_2=-3$$

Проверим, является ли $x_1=5$; $x_2=-3$ корнями уравнения (2):

$\begin{cases}x=5,\\ 5^4+2\cdot125-27\neq0.\end{cases}$ Получили, что $x_1=5$ -не корень уравнения (2).

$\begin{cases}x=-3,\\ 81-54-27=0.\end{cases}$ Значит, $x_1=-3$ - корень уравнения (2), а, следовательно, решением данного уравнения является пара $(-3;1)$.

Ответ: $(-3;1)$.

Пример 5.2. Решить уравнение $x^2y^2+x^2+y^2-14xy+2x-2y+37=0$.

Решение.

1) Попробуем свести данное уравнение к виду (*):

$$(x^2y^2-12xy+36)+(x^2-y+1)^2=0 \text{ или } (xy-6)^2+(x-y+1)^2=0$$

2) Полученное уравнение равносильно системе двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}(xy-6)^2=0,\\ (x-y+1)^2=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}xy-6=0,\\ x-y+1=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=x+1,\\ x^2+x-6=0;\end{cases}$$

$$x^2+x-6=0 \quad\Rightarrow\quad x=-3 \quad \textit{или} \quad x=2.$$

А)

$$\begin{cases}x=2,\\ y=2+1;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=2,\\ y=3.\end{cases}$$

б)

$$\begin{cases}x=-3,\\ y=-3+1;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-3,\\ y=-2.\end{cases}$$

Ответ: $(2;3)$; $(-3;-2)$.

2 способ. Метод оценки.

Сущность метода и его теоретические основы разъяснены в пункте 2 «Уравнения, при решении которых используется ограниченность функций».

Рассмотрим примеры использования метода.

Пример 5.3. Решить уравнение $\dfrac{x^4+1}{x^2}=\sqrt{4-|y|}$.

Решение.

$$\frac{x^4+1}{x^2}=\sqrt{4-|y|} \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2}=\sqrt{4-|y|} \qquad \text{ООУ: } x\neq 0,\ -4\le y\le 4$$

Пусть $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ и $g(x)=\sqrt{4-|y|}$. Оценим каждую функцию.

а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}\ge 2$ (по теореме $t+\dfrac{1}{t}\ge 2$ при $t>0$), т.е. $f(x)\ge 2$.

б) $0\le 4-|y|\le 4$, следовательно, $0\le\sqrt{4-|y|}\le 2$, т.е. $g(x)\le 2$.

Условия соответствующей теоремы в ООУ выполняются, значит исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x^4+1}{x^2}=2,\\ \sqrt{4-|y|}=2.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x=\pm 1,\ y=0$.

Ответ: $(1;0),(-1;0)$.

Пример 5.4. Решить уравнение $(x^2-4|x|+5)(y^2+6y+12)=3$.

Решение.

Пусть

а) $f(x)=x^2-4|x|+5$

$|x_0|=\dfrac{4}{2}=2$

$f(x_0)=f(-2)=4-8+5=1$, тогда $x^2-4|x|+5\ge 1$.

b) $g(y)=y^2+6y+12$

$y_0=-\dfrac{6}{2}=-3$

$g(y_0)=t(-3)=9-18+21=3$, тогда $g(y)\ge 3$.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что данное уравнение равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}x^2-4|x|+5=1,\\ y\end{cases} \Rightarrow$$

$$^2 + 6y + 12 = 3; \qquad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = -3. \end{cases}$$

Ответ: $(2;-3), (-2;-3)$.

<u>3</u> <u>способ.</u> Решение уравнения с двумя неизвестными второй степени, как квадратного относительно одной из неизвестных.

Теоретической основой способа является теория квадратных уравнений.

Рассмотрим примеры решения уравнений этим способом.

Пример 5.5. Решить уравнение $20x^2 + y^2 - 4xy + 24x + 9 = 0.$

<u>Решение.</u>

Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x.

$$20x^2 - 2x(2y-12) + y^2 + 9 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2y-12 \pm \sqrt{4y^2 - 48y + 144 - 20y^2 - 180}}{20} = \frac{2y-12 \pm \sqrt{-16y^2 - 48y - 36}}{20} =$$

$$= \frac{2y-12 \pm \sqrt{-4(4y^2-12y-9)}}{20} = \frac{2y-12 \pm \sqrt{-4(2y+3)^2}}{20}.$$

Т.к. $D = -4(2y+3)^2 \le 0$, то, следовательно, уравнение имеет решение при условии $(2y+3)^2 = 0$, т.е. $y = -\frac{3}{2}$, а тогда $x = \frac{2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 12}{20} = -\frac{15}{20} = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$.

<u>4 способ.</u> Разложение на множители.

Сущность: представить данное уравнение в виде $f(x;y)\cdot g(x;y)\cdot\ldots = 0$ и воспользоваться условием равенства произведения нулю.

Пример 5.6 Решить уравнение $xy - 2 = 2x - y$.

<u>Решение.</u>

$$xy - 2 = 2x - y \quad\Rightarrow\quad xy - 2x - 2 + y = 0 \quad\Rightarrow\quad x(y-2) + (y-2) = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad (y-2)(x+1) = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 2 \quad \text{или} \quad x = -1.$$

Ответ: $(-1; y),\ y \in R;\quad (x; 2),\ x \in R.$

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $\frac{x^2 + y^2 + x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = 2\sqrt{xy}$	$(1;1)$. Свести уравнение к виду $\left(x - \sqrt{y}\right)^2 + \left(y - \sqrt{x}\right)^2 = 0$. $(0;\,0)$ – постороннее решение.
2. $\sqrt{x^3 + 4x^2 + 25} + \ln^6(x^2 + 4x - 4) + y^2 = 0$	$(-5; 0)$.

3. ${}^{6}\,x^3+3x^2+16+arctg^2\left(x^2+x-12\right)+\ln^2 y=0$	$\left(-4;1\right).$
4. ${}^{8}\,y^4+5y^3+64+\arcsin^2\left(y^2+4y\right)+{}^{4}\,x^2-1=0$	$\left(1;-4\right),\left(-1;-4\right).$

5. $tg^2 2x+2\sqrt{3}\cdot tg2x+3=-ctg^2\left(4y-\dfrac{\pi}{3}\right)$	$\begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{2}, n\in Z, \\ y=\dfrac{5\pi}{24}+\dfrac{k\pi}{4}, k\in Z. \end{cases}$ Свести уравнение к виду $\left(tg2x+\sqrt{3}\right)^2+ctg^2\left(4y-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$.
6. $\sin^2\pi x+\log_2^2\left(y^2-2y+1\right)=0$	$(k;0),(k;2), k\in Z$.
7. $1-2x-x^2=tg^2(x+y)+ctg^2(x+y)$	$\begin{cases} x=-1, \\ y=1+\dfrac{\pi}{4}+k\pi; k\in Z \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-1, \\ y=1-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; k\in Z. \end{cases}$ Оценить левую и правую части уравнения.
8. $\left(x^2+2x+2\right)\left(y^2-4y+6\right)=2$	$(-1;2)$. Преобразовать левую часть уравнения $\left(x^2+2x+2\right)\left(y^2-4y+6\right)=$ $=\left((x+1)^2+1\right)\left((y-2)^2+2\right)$ и оценить её.
9. $\log_2\left(2+2\sin(x+y)-\cos^2(x+y)\right)=4^x-2^{x+1}+3$	$\left(0;\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in Z$. Преобразовать левую и правую части уравнения: $2\log_2\left(1+\sin(x+y)\right)=\left(2^x-1\right)^2+2$ и оценить их.
10. $9x^2+14y^2+13=12(x+y)$	$\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{3}{2}\right)$. Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x, которое будет иметь решение тогда и только тогда, когда $D=(2y-3)^2=0$.
11. $x^2+2{,}5y^2+3xy-y+1=0$	$(-3;2)$. 1 способ: Рассмотреть уравнение как квадратное относительно x. 2 способ: Преобразовать уравнение к виду

	$(2x+3y)^2+(y-2)^2=0$.
12. $(x^2+4)(y^2+1)=8xy$	Рассмотреть как квадратное относительно y: $(x^2+4)y^2-8xy+4+x^2=0$ Ответ: $(2;1)$, $(-2;-1)$.
13. $y\sqrt{x}-1=y-\sqrt{x}$	$(x;-1)$, $x>0$, $x\in R$; $(1;y)$, $y\in R$. Преобразовать к виду $(y+1)(\sqrt{x}-1)=0$.
14. $4x^2-25y^2=0$	$\left(x;\frac{2}{5}x\right)$; $\left(x;-\frac{2}{5}x\right)$; $x\in R$.
15. $x^2-3xy+2y^2=0$	$(x;x)$; $\left(x;\frac{x}{2}\right)$; $x\in R$.
16. $3x^2+10xy+3y^2=0$	$(x;-3x)$; $\left(x;-\frac{1}{3}x\right)$; $x\in R$.
17. $(y-2)^2+(x+1)^2=0$	$(-1;2)$.
18. $(2y+x-1)^2+(3x-y+1)^2=0$	$\left(-\frac{1}{7};\frac{4}{7}\right)$.
19. $\lvert 3y+2x-2\rvert+\lvert x-y+3\rvert=0$	$\left(-\frac{7}{5};\frac{8}{5}\right)$.
20. $y^2+4y=x^2-4x$	$(x;-x)$, $(x;x-4)$; $x\in R$.

6. Показательно-степенные уравнения

Показательно-степенными уравнениями будем называть уравнения вида $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{\varphi(x)}$: неизвестное входит и в показатель степени и в основание степени.

Решение таких уравнений сводится к рассмотрению пяти случаев, если некоторые из них не исключаются видом функции $f(x)$.

Рассмотрим эти пять случаев:

1) $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$. Данное уравнение при этих условиях – показательное и оно равносильно смешанной системе: $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)=\varphi(x). \end{cases}$

2) $f(x)=1$. Необходимо решить это уравнение относительно x и подставить в исходное найденные значения x, проверив истинность получаемого числового равенства.

3) $f(x)=-1$. В этом случае уравнение примет вид $(-1)^{g(x)}=(-1)^{\varphi(x)}$. Полученному уравнению могут удовлетворять только такие значения x, при которых $g(x)$ и $\varphi(x)$ - целые числа, т.к. отрица-

тельное число можно возвести только в целую степень, причём из целых чисел уравнению могут удовлетворять целые числа одинаковой чётности.

4) $f(x)=0$. Исходное уравнение принимает вид $0^{g(x)}=0^{\varphi(x)}$.

Этому уравнению могут удовлетворять только такие значения x, при которых $g(x)>0$ и $\varphi(x)>0$.

5) $\begin{cases} f(x)<0, \\ f(x)\neq -1. \end{cases}$ Решить полученную систему неравенств и из полученных значений x отобрать те, которые удовлетворяют исходному уравнению.

Рассмотрим примеры решения показательно-степенных уравнений.

Пример 6.1. Решить уравнение $(2x-1)^x=(2x-1)^{x^2-2}$.

Решение

Решим данное уравнение по сформулированному алгоритму:

1) $\begin{cases} 2x-1>0, \\ 2x-1\neq 1, \\ x=x^2-2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ x^2-x-2=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2}, \\ x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=2. \end{array}\right. \end{cases}$

Решением данной системы является $x=2$.

2) $\begin{cases} 2x-1=1, \\ 1^x=1^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ 1=1; \end{cases}$

$x=1$ является решением данной системы, а, следовательно, и корнем данной уравнения.

3) $\begin{cases} 2x-1=-1, \\ (-1)^x=(-1)^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ 1=1. \end{cases}$ Решение данной системы $x=0$, значит, это очередной корень данного уравнения.

4) $\begin{cases} 2x-1=0, \\ 0^x=0^{x^2-2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ 0^{\frac{1}{2}}=0^{-\frac{7}{4}}. \end{cases}$ Для того, чтобы $x=\frac{1}{2}$ являлся

корнем данного уравнения, необходимо чтобы в данной системе выполнялись неравенства $g(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$. Однако, $\varphi(x) = -\frac{7}{4} < 0$, следовательно, $x = \frac{1}{2}$ корнем данного уравнения не является.

5) $\begin{cases} 2x-1<0, \\ 2x-1\neq -1, \\ x=x^2-2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<\dfrac{1}{2}, \\ x\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-1, \\ x_2=2. \end{array}\right. \end{cases}$ Решением данной системы является $x=-1$.

Ответ: $\{-1,0,1,2\}$.

Пример 6.2. Решить уравнение $(tgx)^{\sin x}=(ctgx)^{\cos x}$.

Решение

Преобразуем данное уравнение к виду $(tgx)^{\sin x}=(tgx)^{-\cos x}$. Переберём четыре возможных случая:

1) $\begin{cases} tgx>0, \\ tgx\neq 1, \\ \sin x=-\cos x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tgx>0, \\ tgx\neq 1, \\ tgx=-1 \end{cases}$ – система несовместна.

2) $\begin{cases} tgx=1, \\ 1^{\sin x}=1^{-\cos x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z, \\ 1=1 \end{cases}$ Следовательно, $x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$ - решение данного уравнения.

3) $\begin{cases} tgx=-1, \\ (-1)^{\sin x}=(-1)^{\cos x}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z, \\ (-1)^{\sin x}=(-1)^{\cos x}. \end{cases}$ У этой системы нет решений, т.к. при $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$, синус и косинус не принимают целые значения.

4) $\begin{cases} tgx<0, \\ tgx\neq -1, \end{cases}$ $\begin{cases} tgx<0, \end{cases}$

$$\sin x = -\cos x; \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} tgx \neq -1, \\ tgx = -1. \end{cases}$$ Система не имеет решения.

Просмотрев результаты решения, получаем $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

П р и м е р 6.3. Решить уравнение $\left|3x^2-2\right|^{\sqrt{x+1}}=\left|3x^2-2\right|^{1+\sqrt{x}}$.

<u>Решение</u>

В данном уравнении $f(x)$ является величиной абсолютной, что позволяет нам рассмотреть всего 3 случая, т.к. $\left|3x^2-2\right|\geq 0$.

1) $$\begin{cases}\left|3x^2-2\right|>0,\\ \left|3x^2-2\right|\neq 1,\\ \sqrt{x+1}=1+\sqrt{x};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}},\\ \left[\begin{array}{l}x_{1,2}\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ x_{3,4}\neq\pm 1,\end{array}\right.\\ \sqrt{x+1}=1+\sqrt{x}.\end{cases}$$

Решив уравнение $\sqrt{x+1}=1+\sqrt{x}$, получим $x=0$, который удовлетворяет смешанной системе.

2) $$\begin{cases}\left|3x^2-2\right|=1,\\ 1^{\sqrt{x+1}}=1^{1+\sqrt{x}};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_{1,2}=\pm 1,\\ x_{3,4}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\\ 1^{\sqrt{x+1}}=1^{1+\sqrt{x}}.\end{cases}$$
, Первое уравнение имеет четыре корня, причём только два из них $x_1=1$ и $x_2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ удовлетворяют области определения уравнения рассматриваемой системы.

3) $$\begin{cases}\left|3x^2-2\right|=0,\\ 0^{\sqrt{1+x}}=0^{1+\sqrt{x}};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{1,2}=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}},\\ 0^{\sqrt{1+x}}=0^{1+\sqrt{x}}.\end{cases}$$
$x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ - не удовлетворяет области определения уравнения системы. Следовательно, $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ - корень уравнения.

Ответ: $\left\{0;\dfrac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{\dfrac{2}{3}};1\right\}$.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ
1. $(3x-4)^{2x^2+2}=(3x-4)^{5x}$	$\left\{\frac{4}{3};\frac{5}{3};2\right\}$. Рассмотреть все случаи в соответствии с алгоритмом.

2. $x-1^{\lg^2 x-\lg x^2} = x-1^3$	$\left\{\frac{1}{10}; 2; 1000\right\}$. Т.к. $f(x)= x-1$, то рассмотреть 3 возможные случая в соответствии с рассмотренным алгоритмом.
3. $x^{\log_2^3 x-\log_2^2 x+3} - \frac{1}{x} = 0$	$\left\{\frac{1}{2}; 1; 16\right\}$. Т.к. область определения уравнения $x>0$, то решение этого уравнения будет содержать два перебора для x: 1) $x>0, x\neq 1$; 2) $x=1$.
4. $\sqrt[3]{x^2-3}^{\,x+2} = \sqrt[4]{x^2-3}^{\,x-1}, x\neq\pm\sqrt{3}$	$-11; \pm\sqrt{2}; \pm 2$.
5. $\sqrt[4]{x-3}^{\,x+1} = \sqrt[3]{x-3}^{\,x-2}, x\neq 3$	$\{2; 4; 11\}$.
6. $x^{\log_3^3 x-1+\log_{\frac{1}{3}} x} = x^{3-\log_3 x}$	$\left\{\frac{1}{9}; 1; 9\right\}$.
7. $\left(x^2+x-57\right)^{3x^2+3} = \left(x^2+x-57\right)^{10x}$	$\left\{\frac{-1\pm\sqrt{233}}{2}; 7; \frac{-1\pm\sqrt{229}}{2}; 3\right\}$.
8. $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$	$\{-3; 1; 2; 3; 4\}$.

7. <u>Некоторые другие нестандартные уравнения</u>

Рассмотрим решение других нестандартных уравнений на конкретных примерах.

Пример 7.1 Решить уравнение $\sqrt{33+\frac{8}{\log_x 4}} = 3\log_4(4\sqrt[3]{x^2})$.

<u>Решение</u>

Так как x – основание логарифма, то $x>0$, $x\neq 1$. При таких x определена и правая часть уравнения.

Преобразуем обе части исходного уравнения: $\frac{8}{\log_x 4} = 8\log_4 x$;

$$3\log_4(4\sqrt[3]{x^2}) = 3\log_4\left(4x^{\frac{2}{3}}\right) = 3\left(1+\frac{2}{3}\log_4 x\right) = 3+2\log_4 x.$$

При $x>0$, $x\neq 1$ получим уравнение, равносильное исходному.

$$\sqrt{8\log_4 x+33} = 2\log_4 x+3.$$

$$\sqrt{8t+33}$$

Пусть $t = \log_4 x$. Тогда $= 2t + 3$;

$$\begin{cases} 2t+3\geq 0, \\ 8t+33=(2t+3)^2; \end{cases}$$

$$8t+33=4t^2+12t+9;$$

$$4t^2+4t-24=0$$

$$t^2+t-6=0;$$

$$t_1=2,$$

$$t_2=-3.$$

При $t=-3$ $2t+3$ отрицательна. Число 2 проверим подстановкой

$\sqrt{8\cdot 2+33}=2\cdot 2+3.$

Значит, $\log_4 x=2,\ x=4^2,\ x=16.$

Ответ: 16.

Пример 7.2. Найти все значения *p,* при которых уравнение $4\sin x+9=p\left(ctg^2 x\right)$ имеет хотя бы один корень.

<u>Решение</u>

Преобразуем данное уравнение $4\sin x+9=p\left(ctg^2 x\right)$;

$4\sin x+9=p\left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)$; $4\sin x+9=\left(\dfrac{p}{\sin^2 x}\right)$.

Последнее уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 4\sin^3 x+9\sin^2 x=p, \\ \sin x\neq 0. \end{cases}$

Уравнение $4\sin^3 x+9\sin^2 x=p$ имеет хотя бы один корень, если число *p* принадлежит множеству значений выражения $4\sin^3 x+9\sin^2 x$.

Найдём множество значений функции $y=4\sin^3 x+9\sin^2 x$ или $y=(4\sin x+9)\sin^2 x$.

Так как $-1\leq\sin x\leq 1$, то $0\leq\sin^2 x\leq 1$ и $9-4\leq 4\sin x+9\leq 4+9$, то есть $5\leq 4\sin x+9\leq 13.$

Значит, $0\leq(4\sin x+9)\sin^2 x\leq 13$. Следовательно, $0\leq y\leq 13$.

Покажем, что функция *y* принимает все значения от 0 до 13.

При $\sin x=0$ функция *y* принимает значения 0, при $\sin x=1$ - значение 13. Поэтому 0 – её наименьшее, а 13 – её наибольшее значения. Так как синус - непрерывная функция, то и функция *y* непрерывная и, значит, принимает все значения от 0 до 13. Поэтому $E(y)=\left[0;13\right]$.

Так как по условию $\sin x\neq 0$, то значение *p* - любое число из промежутка $(0;13\left.\right]$.

Примечание. Уравнение $4\sin^3 x + 9\sin^2 x = p$ можно преобразовать к

равносильной системе $\begin{cases} \sin x = t, \\ -1 \le t \le 1,\, t \ne 0, \\ 4t^3 + 9t^2 = p \end{cases}$ и решить систему графически.

Ответ: $(0;13]$.

Пример 7.3. Решить уравнение $x - |x|\sqrt{1 - \dfrac{4}{9x+4}} + 2 = 0$.

<u>Решение</u>

Преобразуем данное уравнение

$$x + 2 = |x|\sqrt{1 - \frac{4}{9x+4}} \quad \Rightarrow \quad x + 2 = |x|\sqrt{\frac{9x}{9x+4}}.$$

Подкоренное выражение и правая часть должны быть неотрицательны. Значит уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 2 \ge 0, \\ \dfrac{9x}{9x+4} \ge 0, \\ (x+2)^2 = |x|^2 \cdot \dfrac{9x}{9x+4}. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы.

Так как $|x|^2 = x^2$, то

$$\begin{aligned} &(x^2 + 4x + 4)(9x + 4) = 9x^3; \\ &9x^3 + 40x^2 + 52x + 16 = 9x^3; \\ &40x^2 + 52x + 16 = 0; \\ &10x^2 + 13x + 4 = 0; \\ &x_1 = -0.8; \quad x_2 = -0.5. \end{aligned}$$

Для чисел $-0{,}8$ и $-0{,}5$ неравенство $x + 2 \ge 0$ верно. Для обоих чисел $-0{,}8$ и $-0{,}5$ числитель и знаменатель дроби $\dfrac{9x}{9x+4.}$ отрицательны, то есть верно неравенство $\dfrac{9x}{9x+4.} \ge 0$. Следовательно, числа $-0{,}8$ и $-0{,}5$ являются корнями системы и поэтому являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $-0{,}8$ и $-0{,}5$.

$$60\sqrt{x^2 + 6x + \frac{36x(x+6)}{x^2 - 36}}$$

Пример 7.4. Решить уравнение $-1 = x$.

Решение

При $x = \pm 6$ не определена левая часть уравнения.

Для остальных x преобразуем подкоренное выражение:

$$x^2+6x+\frac{36x(x+6)}{x^2-36}=x^2+6x+\frac{36x}{x-6}=\frac{(x^2+6x)(x-6)+36x}{x-6}=\frac{x^3}{x-6}.$$

Получаем уравнение $\sqrt{\frac{x^3}{x-6}}=x+1$, равносильное исходному при $x\neq\pm6$.

Подкоренное выражение и левая часть уравнения должны быть неотрицательны. Значит, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1\geq 0, \\ \frac{x^3}{x-6}\geq 0, \\ \frac{x^3}{x-6}=(x+1)^2. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы.

$$x^3=(x-6)(x^2+2x+1);$$
$$x^3=x^3-4x^2-11x-6;$$
$$4x^2+11x+6=0;$$
$$x_1=-2; \quad x_2=-0.75.$$

Для $x_1=-2$ неравенство $x+1\geq 0$ неверно. Значит, это не корень системы и не корень исходного уравнения. Для $x_2=-0{,}75$ неравенство $x+1\geq 0$ верно, а числитель и знаменатель дроби $\frac{x^3}{x-6}$ отрицательны, то есть сама дробь $\frac{x^3}{x-6}$ положительна. Значит, $x_2=-0{,}75$ являются корнем системы и поэтому является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_2=-0{,}75$.

Пример 7.5. Решить уравнение

$$\left(\log_5\left(-2x^2+5x+7\right)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}25=1.$$

Решение

По условию $-2x^2+5x+7>0$; $x+1>0$ и $57-24x>0$, $57-24x\neq 1$.

Так как $-2x^2+5x+7=(x+1)(7-2x)$, то $7-2x>0$. При таких x равносильны уравнения:

$$\left(\log_5\left(-2x^2+5x+7\right)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}25=1;$$

$$\left(\log_5(x+1)(7-2x)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}25=1;$$

$$\left(\log_5(x+1)+\log_5(7-2x)-\log_5(x+1)\right)\cdot\log_{57-24x}5^2=1;$$

$$2\cdot\log_5(7-2x)\cdot\log_{57-24x}5=1;$$

$$\frac{2\cdot\log_5(7-2x)}{\log_5(57-24x)}=1;$$

$$\log_5(7-2x)^2=\log_5(57-24x).$$

Логарифмическая функция монотонна. Получаем уравнение $(7-2x)^2=57-24x.$

Решим его:

$$49-28x+4x^2=57-24x;$$

$$4x^2-4x-8=0;$$

$$x^2-x-2=0;$$

$$x_1=-1;\ x_2=2.$$

Число -1 не входит в ОДЗ, так как $x+1=0$.

Число 2 проверим подстановкой:

$$\left(\log_5(-8+10+7)-\log_5 3\right)\cdot\log_{57-48}25=(\log_5 9-\log_5 3)\cdot\log_9 25=$$

$$=\log_5 3\cdot\log_{3^2}5^2=\log_5 3\cdot\log_3 5=1.$$

Ответ: 2.

Пример 7.6. Найти все значения *p,* при которых уравнение

$2\cos 2x+\frac{p}{\sin x}=-11$ не имеет корней.

<u>Решение</u>

Преобразуем данное уравнение:

$$2\cos 2x+\frac{p}{\sin x}=-11;$$

$$2\left(1-2\sin^2 x\right)+\frac{p}{\sin x}=-11;$$

$$4\sin^2 x-13=\frac{p}{}$$

$\sin x$.

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases} \left(4\sin^2 x - 13\right)\sin x = p; \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

Найдём значения *p*, при которых эта система имеет решения.

Уравнение $\left(4\sin^2 x - 13\right)\sin x = p$ имеет корни, только в том случае,

когда число *p* принадлежит множеству значений выражения $\left(4\sin^2 x - 13\right)\sin x$. Значит, следует найти множество значений функции $y = 4\sin^3 x - 13\sin x$.

Пусть $\sin x = t$. Тогда $y = 4t^3 - 13t$, $-1 \le t \le 1$. Так как

$-1 \le \sin x \le 1$, то $|t| \le 1$. Отсюда $0 \le t^2 \le 1$ и $12t^2 - 13 \le -1 < 0$. Поэтому $y < 0$ и функция *y* убывает на отрезке $[-1;1]$. Следовательно, $y(-1) = 9$ - наибольшее, а $y(1) = -9$ - наименьшее значение функции *y*. Так как синус – непрерывная функция, то функция *y* непрерывная. Поэтому она принимает все значения от наименьшего, до наибольшего, то есть $E(y) = [-9;9]$.

По условию $\sin x \ne 0$.

Значит, система $\begin{cases} \left(4\sin^2 x - 13\right)\sin x = p; \\ \sin x \ne 0. \end{cases}$ имеет решения при

$p \in [-9;0) \cup (0;9]$. Следовательно, эта система не имеет решения при $p \in (-\infty;-9) \cup \{0\} \cup (9;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-9) \cup \{0\} \cup (9;+\infty)$.

Пример 7.7. Решить уравнение $\sqrt{49 + 9x|x+4|} - 2x = 7$

Решение

Оставим квадратный корень в левой части и возведем в квадрат:

$$\sqrt{49 + 9x|x+4|} - 2x = 7; \ \sqrt{49 + 9x|x+4|} = 2x + 7; \ 9x|x+4| = 4x^2 + 28x.$$

Запишем члены уравнения в левой части и вынесем общий множитель:

$$4x^2 + 28x - 9x|x+4| = 0;$$

$$x(4x + 28 - 9|x+4|) = 0.$$

Подстановкой проверяем, что $x = 0$ – корень уравнения. При остальных x получаем $9|x+4| = 4x + 28$.

a. При $x < -4$ получаем: $-9x - 36 = 4x + 28$; $13x = -64$;

$x = -\dfrac{64}{13} < -4$. Но при таком x сумма $2x + 7$ отрицательна, следовательно, равенство $\sqrt{49 + 9x|x+4|} = 2x + 7$ невозможно.

b. При

$x \geq -4$ получаем: $9x + 36 = 4x + 28$ $x = -\dfrac{8}{5} > -4$. –

;

Проверим. Подставив $-\frac{8}{5}$ в левую часть исходного уравнения, получим: $\sqrt{49+9\frac{8}{5}\left|-\frac{8}{5}+4\right|}-2\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\sqrt{\left(\frac{19}{5}\right)^2}+\frac{16}{5}=7$. Следовательно, $-\frac{8}{5}$ - корень данного уравнения.

Ответ: $-\frac{8}{5}$;0.

Пример 7.8. Решите уравнение $2\left|2^x-x\right|=3\cdot 4^x+2^{x+2}-1{,}75.$

<u>Решение</u>

Приведём степени к одному основанию. Получим уравнение, равносильное данному:

$$2\cdot\left|2^x-x\right|=3\cdot\left(2^x\right)^2+4\cdot 2^x-1{,}75.$$

Пусть $2^x=y$, тогда уравнение принимает вид:

$3y^2+4y-1{,}75-2\cdot|y-1|=0$. Это уравнение, используя определение модуля, заменим равносильной ему совокупностью систем:

$$\begin{cases} y\ge 1, \\ 3y^2+4y-\frac{7}{4}-2(y-1)=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0<y<1, \\ 3y^2+4y-\frac{7}{4}+2(y-1)=0. \end{cases}$$

a. Уравнение первой системы приведём к виду: $12y^2+8y+1=0$. По формуле корней квадратного уравнения получаем: $y=-\frac{1}{2}$ или $y=-\frac{1}{6}$. Это посторонние решения системы, так как не выполняется условие $y\ge 1$. Следовательно, система решений не имеет.

b. Уравнение второй системы приведём к виду: $4y^2+8y-5=0$. По формуле корней квадратного уравнения получаем: $y=-\frac{5}{2}$ или $y=\frac{1}{2}$. Неравенству $0<y<1$, удовлетворяет только $y=\frac{1}{2}$, который является решением второй системы, и, следовательно, совокупности системы.

Итак, $2^x = \frac{1}{2}$, следовательно $x = -1.$

Ответ: -1.

Пример 7.9. При каких *a* уравнение $(2x - 3a)\log_{a+2-x}\left(\frac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}\right) = 0$

а) не имеет решения;

б) имеет единственный корень;
в) имеет 2 корня;
г) имеет 3 корня.

<u>Решение</u>

1) Найдём ООУ:

$$\begin{cases} a+2-x>0,\\ a+2-x\neq 1,\\ 4x^2-11x+8\neq 0,\\ \dfrac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}>0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<a+2,\\ x\neq a+1,\\ x\in R,\\ x>2a-a^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<a+2,\\ x\neq a+1,\\ x>2a-a^2. \end{cases}$$

2) Решим данное уравнение, воспользовавшись условием равенства произведения нулю:

$2x-3a=0$ или $\log_{a+2-x}\left(\dfrac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}\right)$

$x_1=\dfrac{3a}{2}$

$$\frac{a^2-2a+x}{4x^2-11x+8}=1,$$

$$a^2-2a+x=4x^2-11x+8,$$

$$4x^2-12x+8-a^2+2a=0,$$

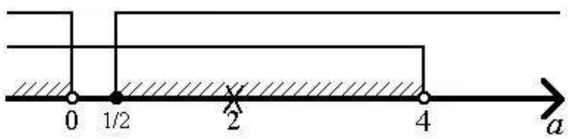
$$x_{2,3}=\frac{6\pm\sqrt{36-32+4a^2-8a}}{4}=$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{4a^2-8a+4}}{4}=\frac{6\pm(2-2a)}{4}.$$

$$x_2=\frac{4-a}{2};\ x_3=\frac{2+a}{2}.$$

3) Установим, при каких a найденные x_1, x_2, x_3 удовлетворяют ООУ:

а) $\begin{cases} x=\dfrac{3a}{2},\\ \dfrac{3a}{2}<a+2,\\ \dfrac{3a}{2}\neq a+1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3a}{2}\\ a\\ a\neq 2, \end{cases}$



$x=\dfrac{3a}{2}$, если

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3a}{2} > 2a + a^2, \\ 2 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a > \frac{1}{2}, \\ a < 0; \end{array}\right. \quad a \in \left(-\infty; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right) \cup \left(2; 4\right).$$

б) $\begin{cases} x = \dfrac{4-a}{2}, \\ \dfrac{4-a}{2} < a+2, \\ \dfrac{4-a}{2} \neq a+1, \\ \dfrac{4-a}{2} > 2a-a^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4-a}{2}, \\ a > 0, \\ a \neq \dfrac{2}{3}, \\ a \in R. \end{cases}$ $x = \dfrac{4-a}{2}$, если

$a \in \left(0; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; \infty\right).$

в) $\begin{cases} x = \dfrac{2+a}{2}, \\ \dfrac{2+a}{2} < a+2, \\ \dfrac{2+a}{2} \neq a+1, \\ \dfrac{2+a}{2} > 2a-a^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2+a}{2}, \\ a > -2, \\ a \neq 0, \\ a \in R. \end{cases}$ $x = \dfrac{2+a}{2}$, если

$a \in (-2; 0) \cup (0; \infty).$

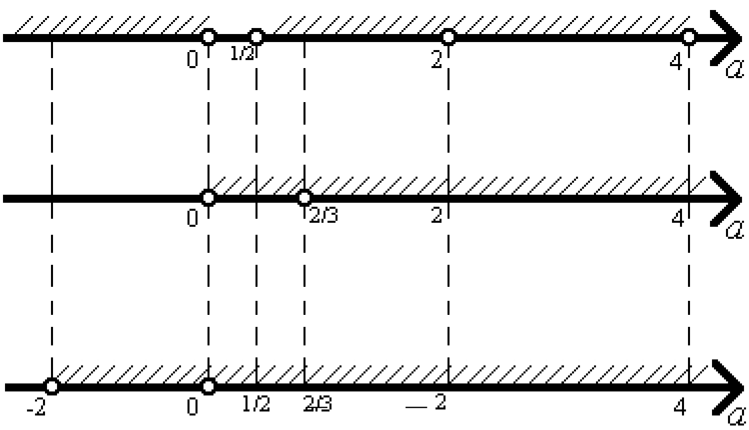
4) Найдём те a, при которых выполняются требования задачи:

$x = \dfrac{3a}{2}$

$x = \dfrac{4-a}{2}$

$x = \dfrac{2+a}{2}$

2 корня, ес



3 корня, если $a \in \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; 2\right) \cup (2; 4).$

Нет корней, если $a \in \{0\}$.

Ответ:

Если $a \in (-\infty; -2]$, то 1 корень.

Если $a \in (-2;\, 0) \cup \left(0;\, \frac{1}{2}\right] \cup \left\{\frac{2}{3};\, 2\right\} \cup (4;\, \infty)$, то 2 корня.

Если $a \in \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 2\right) \cup (2; 4)$, то 3 корня.

Если $a = 0$, то нет корней.

Упражнения для самостоятельной работы

Уравнение	Ответ и указания
1. $tgx + ctgx + tg^2x + ctg^2x + tg^3x + ctg^3x = 6$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$. Ввести переменную $t = tgx + ctgx$, тогда $tg^2x + ctg^2x = t^2 - 2$, а для выражения $tg^3x + ctg^3x$ через t воспользоваться формулой $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
2. При каких а уравнение $15 \cdot 10^x - 20 - a - a \cdot 10^{x+1} = 0$ не имеет корней?	$a \in (-\infty; -20] \cup [1{,}5; \infty)$. Найти *a*, при которых исходное уравнение имеет решения. Для этого привести его к виду $10^x = \frac{20+a}{15-10a}$ при $a \neq \frac{3}{2}$ и потребовать чтобы $\frac{20+a}{15-10a}$ было положительным.
3. При каких значениях параметра *a* уравнение $(\cos x - \log_6 a)\cdot(\cos x - 3 + 3b) = 0$ имеет ровно два корня на отрезке $[0; 2\pi]$?	$\left(\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{4}{3}; 6\right)$. При решении совокупности простейших тригонометрических уравнений использовать ограниченность $\cos x$, а также рассмотреть случай , когда $\log_6 a = 3 - 3b$.
4. При каком *a* уравнение $\log_3(9^x + 9a^3) = x$ имеет два корня?	$\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$. Ввести новую переменную $t = 3^x$ и к полученному квадратному уравнению $t^2 - t + 9a^3 = 0$ применить условия $D > 0,\quad t_1 \cdot t_2 > 0$.
5. Найти *a*, при которых уравнение $(a+1)\cdot 4^x + 2(a-1)\cdot 2^x + 3(a-1) = 0$ не имеет решения.	$(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$. Ввести новую переменную $t = 2^x$ и рассмотреть уравнение $(a+1)t^2 + 2(a-1)t + 3(a-1) = 0$: а) как линейное; б) как квадратное, не имеющее

	действительных корней; в) как квадратное, имеющее единственный отрицательный корень или два отрицательных корня.
6. $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$	$x=3$. Воспользоваться свойством степеней и преобразовать уравнение к виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$
7. $6x+x^2-x^3-\sqrt{cox\pi x-1}=0$	$\{0;2\}$. Найти ООУ и решить разложением на множители полученное алгебраическое уравнение 3 степени.
8. Найти значения параметра *a*, при котором уравнение $\lvert x^2+2x-8\rvert=a$ имеет ровно 3 различных корня.	$a=9$. Построить графики функций $y=\lvert x^2+2x-8\rvert$ и $y=a$.
9. Найти все значения *p*, при которых уравнение $\sin x-5=p\left(1+ctg^2x\right)$ имеет хотя бы один корень	$[-6;0)$. Решение уравнения аналогично предыдущему или по образцу 6.2.
10. Найти все значения *p*, при которых уравнение $2^{3x+1}+8=3\cdot 2^{x+1}\left(3+2^x\right)+p$ или не имеет корней, или имеет единственный корень.	$(-\infty;-46]\cup[8;\infty)$. Решение аналогично.
11. Найти все значения *p*, при которых уравнение $2^{x+1}\left(4^{x+1}+6\right)+2^x\left(2^{2x}-9\cdot 2^{x+1}\right)=p+4\left(9\cdot 2^{2x-3}-1\right)$ имеет ровно 2 корня.	$\left(1\frac{1}{3};4\right]\cup\left\{5\frac{5}{6}\right\}$. Решение аналогично, учесть, что $2^x>0$.
12. При каких значениях *p*, уравнение $\cos 2x+\frac{p}{\sin x}=-10$ не имеет решений.	$(-\infty;-9)\cup\{0\}\cup(9;\infty)$.
13. Решить уравнение: $3+\log^4_{\frac{1}{2}}\left(x^2-x+1\right)=3\lvert\cos((x-1)\cdot\cos x)\rvert$	$x=1$. Использовать метод оценки.
14. Решить уравнение: $\cos^2((x+2)\cdot\cos 2x)-1=\lvert\log_2\left(x^2+5x+7\right)\rvert$	$x=-2$. Использовать метод оценки.
15. Решить уравнение: $\sqrt[6]{\cos^6\left(x^2\sin x\right)}-1=\log^6\left(9x^2+3x+1\right)$	$x=0$. Использовать метод оценки.
16. Найти все значения *p*, при которых уравнение $3^x\left(3^{2(x+1)}-7{,}5\cdot 3^{x+1}\right)=p-3\left(4\cdot 3^x+1\right)$ имеет ровно три корня.	$\left(3;4\frac{5}{6}\right)$. Преобразовать уравнение к виду $9t^3-22{,}5t^2+12t+3=p$, где $t=3^x$, $t>0$. Ввести функции $y=9t^3-22{,}5t^2+12t+3$ и $y=p$,

	построить их графики и найти ответ.
17. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $\ln x = \frac{a}{x}$?	1 корень, если $a = -\frac{1}{e}$ или $a \geq 0$; 2 корня, если $a \in \left(-\frac{1}{e}; 0\right)$; нет корней, если $a < -\frac{1}{e}$. В ООУ $x > 0$ данное уравнение равносильно уравнению $x \ln x = a_0$. Построить схематический график функции $y = x \ln x$, используя производную, и «считать» с графика ответ.
18. Сколько корней в зависимости от a имеет уравнение $e^x = ax$?	1 корень, если $a < 0$ или $a = e$; 2 корня, если $a > e$; нет корней, если $a \in [0; e)$. Свести уравнение к виду $\frac{e^x}{x} = a$ ($x = 0$ - не корень). Построить график функции $y = \frac{e^x}{x}$ и «считать» ответ с графика.
19. $\left\|1 - \log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right)\right\| = 1 - \log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right)$	$\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [1; 2) \cup (3; 6]$. Т.к. уравнение имеет вид $\|t\| = t$, то его можно заменить равносильной системой неравенств $:\begin{cases} 1 - \log_{2x}\left(x^2 - 5x + 6\right) \geq 0, \\ 2x > 0, \\ 2x \neq 1, \end{cases}$ которая равносильна совокупности следующих систем неравенств: а) $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ x^2 - 7x + 6 \geq 0, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > \frac{1}{2}, \\ x^2 - 5x + 6 > 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0. \end{cases}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Программа элективного курса

Дидактические материалы по курсу